

FORT
UND
ILÖMILCH

LEHRBUCH DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE I

SIEBENTE AUFLAGE



P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen, sowie ein Generalregister zu obigen Bänden bringen wird.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica**, das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik**, Organ für angewandte Mathematik, die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, ferner **Natur und Schule**, Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen, die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich in kurzen Zwischenräumen: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“.** Diese „Mitteilungen“, welche unentgeltlich in 25 000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, welches meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte jährlich zwei- bis dreimal neu gedruckte **Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 96. Ausgabe [XL u. 168 S. gr. 8], sowie der Nachtrag 1901—1903 [XII u. 56 S.] zu diesem Katalog in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

LEHRBUCH

DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

BEARBEITET VON

O. FORT UND **O. SCHLÖMILCH.**

ERSTER TEIL.

ANALYTISCHE GEOMETRIE DER EBENE

VON

O. FORT,

WEIL. PROFESSOR AM KÖNIGL. SÄCHS. POLYTECHNIKUM ZU DRESDEN.

SIEBENTE AUFLAGE

BESORGT VON **R. HEGER** IN DRESDEN.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG UND BERLIN,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1904.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Bei der ersten Bearbeitung des jetzt in zweiter Auflage erscheinenden Lehrbuches der analytischen Geometrie der Ebene waren es hauptsächlich zwei Gesichtspunkte, welche ich fortwährend im Auge behielt. Was zuvörderst in materieller Hinsicht die Auswahl des Stoffes betrifft, so war mein Augenmerk darauf gerichtet, wenigstens innerhalb bestimmter Grenzen eine gewisse Vollständigkeit zu erzielen. Die mehr praktische Richtung meiner Zuhörer an der hiesigen polytechnischen Schule, für welche das Lehrbuch zunächst bestimmt ist, wies mich darauf hin, aus dem reichen Materiale, welches namentlich die Theorie der Linien zweiten Grades darbietet, besonders solche Sätze auszuwählen, welche eine konstruktive Anwendung gewähren. Ich habe mich bemüht, diese Sätze zu einem organischen Ganzen zu vereinigen, welches die Bestimmung hat, die Verschiedenartigkeit der Methoden der analytischen Geometrie klar hervortreten zu lassen. — In formeller Hinsicht war in betreff der Darstellung mein Streben besonders auf Vereinfachung des Kalküls mittels geometrischer Deutung der Gleichungen und auf eine möglichst natürliche Verknüpfung der einzelnen Untersuchungen gerichtet. Die letztere Rücksicht ist namentlich für mich bei der Anordnung des Inhaltes der Kapitel IV bis VIII entscheidend gewesen. Da bei den in den ersten Kapiteln enthaltenen geometrischen Lehrsätzen großenteils an Resultate angeknüpft werden konnte, welche ich als aus der Elementargeometrie bekannt voraussetzen durfte, so schien es mir zweckmäßig, auch bei Untersuchung der Kegel-

schnitte von einer allgemeinen Eigenschaft dieser Linien auszugehen, welche sich leicht rein geometrisch begründen läßt. Sind aus dieser allgemeinen Eigenschaft die Kegelschnittformen nebst den zugehörigen Gleichungen gewonnen, so können dieselben nachher mittels der Methoden der analytischen Geometrie weiter verfolgt werden; aus diesen speziellen Diskussionen, welche sich auf bekanntes stützen, läßt sich dann leichter eine mit um so größerer Strenge zu führende allgemeine Untersuchung ableiten. Die scheinbare Identität der Überschriften „die Kegelschnitte“ im vierten und „die Linien zweiten Grades“ im achten Kapitel findet in diesem Gedankengange ihre Rechtfertigung. Am ersteren Orte tritt der stereometrische Ausgangspunkt in den Vordergrund, an der letzteren Stelle soll seine Beziehung zu den Gleichungen zweiten Grades erläutert werden.

Diesen der Hauptsache nach bereits in der Vorrede zur ersten Auflage niedergelegten Bemerkungen habe ich wenig hinzuzufügen, da der Inhalt der neuen Auflage nicht wesentlich von der ersten abweicht. Neu hinzugekommen ist nur der von der Quadratur der Hyperbel handelnde Abschnitt, sowie einzelnes bei der Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades. Der erstere Zusatz hat die Bestimmung, die auf die Quadratur der Kegelschnitte bezüglichen Untersuchungen zu vollkommener Abrundung zu bringen; bei der neuen Bearbeitung eines Teiles des achten Kapitels strebte ich danach, Betrachtungen, welche für den Anfänger in der Regel nicht ohne Schwierigkeit sind, eine größere Schärfe und Klarheit zu verleihen. Aus demselben Streben sind eine Menge kleinerer Änderungen, welche fast jeder Paragraph enthält, hervorgegangen.

Dresden, Ostern 1863.

O. Fort.

Vorrede zur dritten Auflage.

Die gegenwärtige dritte Auflage meiner analytischen Geometrie der Ebene unterscheidet sich von der zweiten nur durch eine Menge kleinerer, auf Strenge der Begründung und Klarheit des Ausdruckes bezüglicher Änderungen. Die Einführung einiger abgeänderter Bezeichnungen wurde durch den Wunsch, mit anderwärts üblichem in besseren Einklang zu kommen, bedingt. Wenn im übrigen der Inhalt des Buches derselbe geblieben ist und die neueren Theorien, namentlich der Gebrauch der Linienkoordinaten, sowie der homogenen Koordinaten, nicht Berücksichtigung gefunden haben, so ist daran zu erinnern, daß die Auswahl des Stoffes hauptsächlich mit Rücksicht auf das praktische Bedürfnis künftiger Techniker getroffen wurde. Dafür, daß ein Lehrbuch innerhalb der beschränkten Grenzen des vorliegenden auch für größere Kreise Befriedigung gewährt, dürfte der rasche Absatz zweier starker Auflagen ein Zeugnis ablegen.

Dresden, im September 1871.

O. Fort.

Vorrede zur vierten Auflage.

Bei dem raschen Absatze, welchen auch die dritte Auflage des vorliegenden Werkes gefunden hat, und zwar in einem Zeitraume, in welchem von mir selbst am hiesigen Polytechnikum Vorlesungen über die analytische Geometrie der Ebene nicht gehalten worden sind, ergab sich für mich keine Veranlassung, rücksichtlich des Inhaltes des von mir bearbeiteten Teiles aus den in den früheren Vorreden festgestellten Grenzen in der nötig gewordenen neuen Auflage herauszutreten. Die von mir vorgenommenen Änderungen beziehen sich daher großenteils nur auf die Form und verfolgen hauptsächlich den Zweck einer möglichst klaren Fassung des Ausdruckes. Kleine Zusätze sind zu demselben Zwecke nur an wenigen Stellen erforderlich gewesen.

Dresden, im April 1877.

O. Fort.

Vorrede zur fünften Auflage.

Der als Lehrer und Schriftsteller in gleicher Weise ausgezeichnete und verdiente Verfasser dieses Buches sah sich infolge andauernder Kränklichkeit Ostern 1879 veranlaßt, sein Lehramt am Königl. Sächs. Polytechnikum niederzulegen; zwei Jahre darauf, am 6. Mai 1881, erlag er seinen schweren Leiden.

Nachdem dieses Werk gegen drei Jahrzehnte lang seine Brauchbarkeit und Zweckmäßigkeit in Bezug auf Auswahl und Darstellung erwiesen hat, galt es bei der Bearbeitung der neuen Auflage zunächst, ihm die von der Hand des Verfassers verliehenen Vorzüge zu erhalten. Der Plan des Buches ist daher nicht erweitert worden; und da, wo einzelne Abschnitte umgearbeitet oder hinzugefügt worden sind, wird hoffentlich das Bestreben bemerkbar sein, die Klarheit und Deutlichkeit der Vortragsweise des Verfassers möglichst zu erreichen. Andrerseits lag aber auch die Verpflichtung vor, durch geeignete, in den Rahmen des Buches sich fügende Zusätze und Überarbeitungen die Brauchbarkeit desselben zu erhöhen und für die Zukunft zu sichern.

Am Schluß des § 6 ist die Normalform der Gleichung der Geraden hervorgehoben worden. — Die schon bisher beim Kreise verwendete Methode der symbolischen Bezeichnung von Funktionen ist auch bei der Geraden in § 7 angewendet worden; damit hängen zwei neue hinzugekommene Beispiele in § 8 zusammen. — In § 10 wurde der Schluß erneuert. — In § 13 ergab sich eine einfachere Darstellung dadurch, daß der zwischen Brennpunkt und Direktrix liegende Scheitel zum Anfangspunkt genommen wurde. Die Umgestaltung dieses Abschnitts bedingte einige Änderungen des folgenden. — Die Ableitung der Beziehungen zwischen konjugierten Ellipsendurchmessern am Ende des § 22 ist durch Einführung der exzentrischen Anomalie vereinfacht worden. — Die Diskussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades, § 30, wurde vollständig neu bearbeitet. In der gegenwärtigen Gestalt ist die Untersuchung auf das rechtwinklige Koordinatensystem begründet; sie erreicht auf möglichst kurzem Wege das Ziel, in fertigen Formeln unzweideutige Auskunft über die Natur des dargestellten

Gebildes, die Lage der Symmetrieachsen und die Hauptdimensionen zu geben. Zum Schluß wird die Invarianz der charakteristischen Zahlen nachgewiesen und dabei Bezug auf das schiefwinklige System genommen. — § 33 ist um zwei Beispiele vermehrt und die Einleitung zu § 37 umgeändert worden.

Möchten die Änderungen sich zweckmäßig erweisen und das Buch in dieser neuen Ausgabe seine alten Freunde wiederfinden und neue sich erwerben!

Dresden, im April 1883.

R. Heger.

Vorrede zur sechsten Auflage.

In dieser Auflage habe ich die schon mit der vorigen eingeschlagene Richtung etwas weiter verfolgt. Das Teilverhältnis von Strecken und das Sinusteilverhältnis von Winkeln treten in zweckmäßiger Weise hervor. Hieran schließt sich die Verwendung des Doppelverhältnisses und der projektiven Verwandtschaft von Strahlbüscheln und Punktreihen. Um hier für Raum zu gewinnen, ist der Abschnitt über die Tangenten algebraischer Kurven unterdrückt worden. Die Untersuchung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades hat abermals eine Umgestaltung erlebt, hoffentlich nicht zu ihrem Nachteile.

Die Abschnitte § 36 und § 37 enthalten die Lösung einiger besonders wichtiger Konstruktionsaufgaben. Man könnte darin einen Übergriff auf das Gebiet der synthetischen Geometrie erblicken; indessen ist es letztes Ziel jeder geometrischen Untersuchung, auch der analytischen, die Lösung von Konstruktionen vorzubereiten, ihre Ausführung darf daher auch als die reife Frucht analytischer Untersuchungen dargeboten werden.

Dresden, im Juli 1893.

R. Heger.

Vorrede zur siebenten Auflage.

Von den bei der Bearbeitung dieser Auflage gemachten Änderungen möchte ich an dieser Stelle folgende erwähnen: In § 7, S. 43 sind vor die Einführung der abgekürzten Bezeichnung zwei Erörterungen eingeschoben, und das Folgende etwas weniger knapp dargestellt worden. § 8 ist umgearbeitet worden; insbesondere wurde das vollständige Vierseit wieder im Sinne der älteren Auflagen behandelt. In § 9 wurde die Polargleichung des Kreises eingeführt und darin der passendste Zugang zur Potenz und Polaren gefunden. In § 33 wurden die Asymptotengleichung mehr hervorgehoben, einige Formeln verbessert, und die Unterscheidungszeichen auf einige Zahlenbeispiele angewandt; die folgenden Paragraphen wurden umgestellt, und dem nunmehrigen § 35 eine einfache Ableitung des Pascalschen Satzes, und dem § 37 einiges über die Herstellung von quadratischen Gleichungen aus linearen sowie etwas weiteres über die gleichseitige Hyperbel hinzugefügt. Die allzu breiten Ausführungen des 9. Kapitels wurden gekürzt und §§ 38, 39 und 40 z. T. neu bearbeitet.

An Stelle der früheren kurzen Übersicht ist eine ausführliche Inhaltsangabe getreten.

Dresden, im August 1903.

R. Heger.

Inhalt.

Zweites Kapitel. Die gerade Linie.

Drittes Kapitel. Der Kreis.

Viertes Kapitel. Die Kegelschnitte.

Fünftes Kapitel. Die Parabel.

Sechstes Kapitel. Die Ellipse.

Achtes Kapitel. Die Linien zweiten Grades.

Einleitung.

Das Gebiet der niederen Geometrie beschränkt sich auf die Untersuchung der Eigenschaften derjenigen räumlichen Gestalten, welche mit Benutzung des Lineals und Zirkels darstellbar sind, d. i. der geradlinigen Gebilde und des Kreises, sowie derjenigen Flächen und Körper, deren Entstehung in einfacher Weise auf diese beiden Grundformen zurückgeführt werden kann. Ihre Methode geht dabei im wesentlichen von der Anschauung aus, und wenn sie sich zu ihren Untersuchungen auch der reichen Hilfsmittel der Algebra bedient, so geschieht dies doch nur zu dem Zwecke, um die Formen von Größenbeziehungen, welche ursprünglich der geometrischen Konstruktion entnommen wurden, umzubilden und dadurch zu Lehrsätzen oder zur Lösung von Aufgaben zu gelangen. Dieser Art von Anwendung der Arithmetik auf die Raumlehre gehört die sogenannte rechnende Geometrie und die gewöhnlich als besonderer Teil davon getrennte Trigonometrie an.

Bei jeder solchen Benutzung der Zahlenlehre zu geometrischen Untersuchungen ist die Möglichkeit vorausgesetzt, daß man die Zahlen ebenso, wie der Raum an keiner Stelle unterbrochen erscheint, als stetig veränderlich auffassen kann. Die Erweiterungen, welche die Zahlenreihe durch die Operationen der allgemeinen Zahlenlehre erlangt, geben hierzu die Mittel an die Hand. Während nämlich die Weite der Sprünge, welche beim Übergange von einer Zahl zu ihrer nächstfolgenden oder nächstvorhergehenden statttinden müssen, durch die Einschiebung der gebrochenen Zahlen beliebig klein gemacht werden kann, gewährt die Einführung der Irrationalzahlen die Möglichkeit, die auch hierbei noch bleibenden Lücken auszufüllen; mittels der negativen Zahlen

wird aber die anfänglich vorhandene einseitige Begrenzung aufgehoben. Durch diese Erweiterungen wird die Reihe der aufeinander folgenden Zahlen mit einer nach beiden Seiten unbegrenzten geraden Linie vergleichbar; der Übergang von einem Punkte dieser Geraden zu einem andern mit Durchlaufung aller möglichen Zwischenpunkte läßt sich durch den Übergang von einer Zahl zu einer andern darstellen.

Diese durch die stetige Veränderlichkeit der Zahlen erlangte Analogie zwischen den Zahl- und Raumgrößen ist für die Entwickelung der geometrischen Wissenschaft von der größten Wichtigkeit geworden. Griechische Mathematiker der nachplatonischen Zeit hatten bereits ein wertvolles Hilfsmittel zur Erkenntnis der Eigenschaften der Kegelschnitte darin gefunden, eine Gleichung zwischen zwei veränderlichen Strecken geometrisch zu deuten. Aber erst mußte vor zwölf Jahrhunderten im Morgenlande unsere heutige Art der Zahlbezeichnung durch zehn Zeichen und den Stellenwert, — und vor drei Jahrhunderten im Abendlande die Buchstabenrechnung erfunden werden, ehe der so fruchtbare Gedanke der griechischen Geometer sich zu zu voller, reicher Blüte entfalten konnte.

Die von den Alten überlieferten Anfänge, wie die in gleicher Richtung sich bewegenden geometrischen Arbeiten seiner unmittelbaren Vorgänger und Zeitgenossen zu einer wissenschaftlichen Einheit zusammengefaßt zu haben, ist das Verdienst des großen Descartes (1596—1650), der durch sein im Jahre 1637 unter dem einfachen Titel: „Geometrie" erschienenes Werk den Grund zu einer neuen Wissenschaft, der analytischen Geometrie, legte, durch welche die Raumlehre eine völlige Umgestaltung und grenzenlose Bereicherung erfahren hat.

Die Lehre von den Gleichungen zwischen veränderlichen Zahlen wird in ihr zu einer unerschöpflichen Bildungsquelle räumlicher Gestalten; zugleich gewährt sie aber auch die Mittel, durch neue, rein algebraische Untersuchungsmethoden die Eigenschaften dieser Gebilde zu entdecken.

Während dieser Zweig der Geometrie durch Descartes auf Betrachtung der Linien in der Ebene beschränkt blieb, so erlangte er durch die Nachfolger desselben bald eine wesentliche Erweiterung, indem er sich auch des nach drei Dimensionen ausgedehnten

Raumes bemächtigte. Parent (1666—1716) wendete zuerst drei veränderliche Zahlen an, um eine krumme Oberfläche durch eine Gleichung auszudrücken; namentlich aber erhielt diese erweiterte Anwendung der analytischen Geometrie ihre vollständige Entwickelung durch Clairaut (1713—1765) in einem Werke über die Linien doppelter Krümmung und die krummen Oberflächen. Seitdem hat eine große Zahl der vorzüglichsten Mathematiker sich die Fortbildung der neuen Disziplin zur Aufgabe gemacht.

Ihrem historischen Entwickelungsgange getreu zerfällt die analytische Geometrie, in Übereinstimmung mit der Einteilung der niederen Geometrie in Planimetrie und Stereometrie, in zwei Hauptteile: die analytische Geometrie der Ebene und die analytische Geometrie des Raumes. Die erstere benutzt die Lehre von den veränderlichen Zahlen zur Untersuchung der Linien in der Ebene, die letztere beschäftigt sich mit den Linien im Raume und den Flächen.

Die analytische Geometrie der Ebene, die hier zunächst unsere Aufgabe bilden soll, hat ihren Ausgang zu nehmen von den Methoden, mittels deren die Lage eines Punktes der Ebene in der Bezeichnungsweise dieser Wissenschaft ausgedrückt wird.

Erstes Kapitel.

Die Punkte in der Ebene.

§ 1. Punkte in einer Geraden. Rechtwinkliges Koordinatensystem.

In einer im Punkte A einseitig begrenzten geraden Linie (einem Strahl) AX (Fig. 1) wird die Lage eines beliebigen Punktes P durch die Strecke AP, d. i. durch seinen Abstand vom Anfangspunkte vollständig bestimmt. Die Beschränkung, hierbei die Linie in A begrenzt anzunehmen, scheint deshalb notwendig, weil außerdem derselbe Abstand zweien zu beiden Seiten von A gelegenen Punkten zukommen würde. Wir gelangen jedoch dahin, diese vorläufige Einschränkung zu beseitigen, wenn wir einen neuen Punkt A_1 zum Ausgangspunkt für die Messung der Abstände wählen und den Beziehungen, durch welche die frühere und jetzige Entfernung des Punktes P vom Anfange der Messung aneinander geknüpft sind, allgemeine Geltung zuschreiben. Setzen wir nämlich $AP = x$, $A_1 P = x_1$ und $AA_1 = a$, so folgt:

Fig. 1.

A P' A₁ P X

1) $$x = x_1 + a$$

und

2) $$x_1 = x - a.$$

Die letztere und somit auch die erste Gleichung findet aber für jede beliebige Lage des Punktes P Anwendung, wenn man für solche Punkte, bei denen $x < a$ ist, den Wert von x_1 negativ in Rechnung bringt. Haben daher z. B. P und P' gleiche Abstände von A_1, so kommen den von A_1 aus nach entgegengesetzter Richtung verlaufenden Strecken $A_1 P$ und $A_1 P'$ gleiche, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Zahlwerte zu.

Sowie wir in der obigen Figur von einem links gelegenen Punkte A der Linie AX ausgingen, konnten wir uns auch dieselbe Gerade anfänglich nach rechts begrenzt vorstellen und ganz wie vorher von ihrem Endpunkte nach A_1 übergehen. Wir gelangen hierdurch ohne Schwierigkeit zu ganz entsprechenden Beziehungen, gewinnen aber zugleich die Überzeugung, daß es lediglich Sache eines vorläufigen Übereinkommens ist, auf welcher Seite vom beliebig gewählten Anfangspunkte aus die Entfernungen aller übrigen Punkte derselben Geraden als positiv oder negativ in Rechnung zu ziehen sind.

Werden die in 1) und 2) gewonnenen Gleichungen in der Form

$$x = x_1 + (+a) \text{ und } x_1 = x + (-a)$$

geschrieben, so erhalten beide eine gemeinschaftliche Schreibweise und zeigen, wie man von den Entfernungen, welche einem anfänglich gewählten Anfangspunkte zugehören, zu den auf einen neuen Anfang bezogenen übergeht. Beachtet man hierbei, daß in Übereinstimmung mit dem Vorigen zu entgegengesetzten Verschiebungen des Anfangspunktes entgegengesetzte Vorzeichen gehören, so kann die Formel 1) als Inbegriff beider Gleichungen angesehen werden.

Wir gelangen nach diesen Vorbetrachtungen zu der Bestimmung der Lage eines an beliebiger Stelle in einer gegebenen Ebene gelegenen Punktes, wenn wir zunächst eine gerade Linie als seinen geometrischen Ort fixieren und in dieser seinen Abstand von einem festen Anfangspunkte bestimmen. Zu diesem Zwecke seien $X'X$ und $Y'Y$ (Fig. 2) zwei der Lage nach gegebene, aufeinander senkrechte und im Punkte O sich schneidende Gerade derjenigen Ebene, in welcher die Lage eines Punktes P_1 bestimmt werden soll. Zieht man von P_1 die Gerade P_1N senkrecht auf $Y'Y$, also parallel mit $X'X$, so wird durch die Strecke $NP_1 = OM$ der Abstand der zu $Y'Y$ parallelen Geraden, in welcher P_1 gelegen ist, von der Linie $Y'Y$ gemessen. Wählt man hierauf in P_4P_1 den Punkt M

Fig. 2.

als Ausgang für die Messung der Entfernung aller übrigen Punkte, so ist in dieser Geraden durch die Strecke $MP_1 = ON$ die Lage von P_1 vollständig bestimmt. Dasselbe Resultat, nämlich die Abhängigkeit der Lage des Punktes P_1 von den Entfernungen NP_1 und MP_1, wird gewonnen, wenn wir anfänglich durch MP_1 die Lage der Geraden $P_2 P_1$ fixieren und in ihr N als Anfangspunkt der Strecke NP_1 wählen.

Fassen wir das Vorhergehende zusammen, so kommt es im wesentlichen darauf hinaus, die Lage eines Punktes in der Ebene durch seine senkrechten Abstände von zwei in dieser Ebene gelegenen, aufeinander senkrechten Geraden zu bestimmen. Durch diese beiden festen Linien, auf welche die Lage aller anderen Punkte der Ebene bezogen werden soll, wird dieselbe in vier Felder, die Winkel XOY, YOX', $X'OY'$ und $Y'OX$ zerlegt. Insofern nun jedesmal ein Punkt in jedem dieser Felder dieselben Entfernungen von $X'X$ und $Y'Y$ besitzt, geht die bei Punkten in einer Geraden bereits vorhandene Unbestimmtheit in eine Vierdeutigkeit über, der wir uns jedoch, wie dort, entziehen, wenn wir die entgegengesetzte Richtung der Abstände durch einen Wechsel des Vorzeichens ausdrücken. Da es hierbei nur Sache eines vorgängigen Übereinkommens ist, wohin man die positiven und wohin die negativen Strecken zu verlegen hat, so soll ein für allemal die Bestimmung getroffen werden, daß, wo nichts anderes besonders festgesetzt wird, die Abstände nach der rechten Seite von $Y'Y$ aus und nach oben von $X'X$ als positive, die entgegengesetzt gelegenen dagegen negativ in Rechnung gebracht werden. Haben daher z. B. in Fig. 2 die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 die der Größe nach gleichen Abstände $NP_1 = NP_2 = N'P_3 = N'P_4 = a$ und $MP_1 = M'P_2 = M'P_3 = MP_4 = b$, so ist nach unserem Übereinkommen die Entfernung des Punktes

P_1 von der Geraden $Y'Y = +a$, von der Geraden $X'X = +b$,
P_2 „ „ „ „ $= -a$, „ „ „ „ $= +b$,
P_3 „ „ „ „ $= -a$, „ „ „ „ $= -b$,
P_4 „ „ „ „ $= +a$, „ „ „ „ $= -b$.

Die beiden Linien $X'X$ und $Y'Y$, von denen die Lage aller Punkte der Ebene abhängig gemacht ist, haben die Namen Koordinatenachsen erhalten und bilden zusammengenommen ein recht-

winkliges Koordinatensystem. Der Durchschnittspunkt O führt die Benennung Anfangspunkt oder Ursprung der Koordinaten, oder auch Nullpunkt des Koordinatensystems; die Strecken MP und NP werden die Koordinaten des Punktes P genannt. Um die beiden Koordinaten, sowie die zugehörigen Achsen auseinander zu halten, werden wir die mit der Achse $X'X$ parallele Koordinate mit x, die zu $Y'Y$ parallele mit y bezeichnen und sie entsprechend ihrer Bezeichnung die x- und die y-Koordinate nennen; von den Achsen selbst soll $X'X$ mit dem Namen x-Achse oder Achse der x, $Y'Y$ mit dem Namen y-Achse oder Achse der y belegt werden. Nach dem Obigen ist daher für den Punkt P_1 die x-Koordinate $x = + a$ und die y-Koordinate $y = + b$, für P_2 aber $x = - a$, $y = + b$ u. s. f.

Insofern in Fig. 2 $NP_1 = OM$ ist, muß es auch ausreichen, zur Bestimmung der Lage von P_1 nur die y-Koordinate MP_1 zu konstruieren und die auf der x-Achse abgeschnittene Strecke OM als die zugehörige x-Koordinate zu betrachten. Bei dieser zur Abkürzung des Verfahrens gebräuchlichen Konstruktion führt die auf der x-Achse abgeschnittene Koordinate den Namen Abscisse, das entsprechende y den Namen Ordinate des Punktes P_1. Beide Benennungen lassen sich dann auch auf die Achsen übertragen, sodaß die x-Achse den Namen Abscissen- und die y-Achse den Namen Ordinatenachse erhält. Mit demselben Rechte kann allerdings auch die x-Koordinate NP_1 direkt als Ordinate konstruiert und das zugehörige y als Abscisse ON auf der y-Achse abgeschnitten werden; man entgeht jedoch dieser Unbestimmtheit, wenn man im letzteren Falle auch die Bezeichnung der Achsen verwechselt.

Die zuletzt mitgeteilten abgekürzten Konstruktionen gewinnen besonders dann eine nutzbare Anwendung, wenn in einer gegebenen Bildebene ein bestimmter Punkt mittels seiner Koordinaten aufgetragen werden soll. Aus dem Früheren erhellt, daß diese Aufgabe nur eine Lösung haben kann, wenn das Koordinatensystem und die zur Abmessung der geradlinigen Strecken dienende Längeneinheit festgelegt sind.

Wird zur Darstellung eines Punktes nur eine seiner beiden Koordinaten gegeben, so genügt der gestellten Aufgabe jeder Punkt derjenigen Geraden, welche in einem der gegebenen Koordinate

gleichen Abstande parallel zur anderen Achse gelegt werden kann[*]. Die Gleichung

3) $$x = a$$

umfaßt also die Lagen aller Punkte einer in der Entfernung a zur y-Achse gezogenen Parallelen, während die Gleichung

4) $$y = b$$

einer Parallelen zur x-Achse angehört. In gleicher Weise beziehen sich die Formeln

5) $$x = 0 \text{ und } y = 0$$

auf alle in den beiden Koordinatenachsen gelegenen Punkte, und zwar die erstere auf die y-, die letztere auf die x-Achse. Durch das Zusammentreffen der beiden letzten Gleichungen wird der Koordinatenanfang bestimmt.

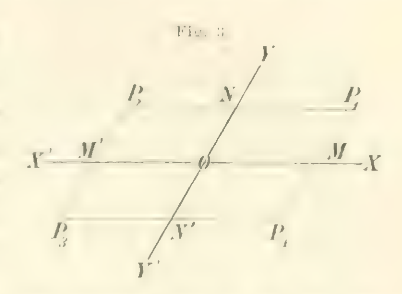
Die Gleichungen 3) bis 5) stellen einen ersten Fall dar, in welchem durch eine Gleichung der Lauf einer Linie bestimmt ist. Eine Gleichung, welche diese Eigenschaft besitzt, führt den Namen: Gleichung der Linie. In Nr. 3) ist daher die Gleichung einer Parallelen zur y-Achse, in 4) die einer Parallelen zur x-Achse enthalten; Nr. 5) umfaßt die Gleichungen der beiden Koordinatenachsen. — Da zur Bestimmung eines Punktes zwei Gleichungen der unter Nr. 3) und 4) enthaltenen Formen notwendig sind, so zeigt sich, daß die angewendete Bestimmungsmethode im wesentlichen darin besteht, jeden Punkt in der Ebene des Koordinatensystems als Durchschnittspunkt zweier geraden Linien zu fixieren.

§ 2. Schiefwinkliges Koordinatensystem. Polarkoordinaten.

Dieselben Beziehungen, welche im vorigen Paragraphen für die Lage eines Punktes gegen ein rechtwinkliges Koordinatensystem aufgestellt wurden, finden auch für zwei einen beliebigen schiefen Winkel einschließende Koordinatenachsen Anwendung, wenn man nur die Koordinaten des Punktes nicht mehr in senkrechter Richtung, sondern in einer zu den Achsen parallelen Lage mißt. Fig. 2

[*] Durch die nötige Rücksicht auf die Vorzeichen der Koordinaten werden hierbei die beiden in gleichem Abstande von einer Geraden gelegenen Parallelen unterschieden.

geht hierbei in Fig. 3 über, an welcher alle auf die erstere Figur bezüglichen Betrachtungen wiederholt werden können. — Der von den positiven Achsenseiten eingeschlossene zwischen 0 und 180° gelegene Winkel XOY führt hier den Namen Koordinatenwinkel, das System selbst heißt ein schiefwinkliges Koordinatensystem. Alle übrigen Benennungen werden vom rechtwinkligen System übertragen. Die rechtwinkligen und schiefwinkligen Koordinaten lassen sich in den Namen Parallelkoordinaten zusammenfassen.



Die Anwendung eines rechtwinkligen Koordinatensystems führt großenteils zu einfacheren Rechnungen, als die Wahl eines schiefwinkligen, doch gibt es auch Fälle, bei denen durch letzteres eine Vereinfachung erlangt wird. Vorläufig beschränken wir uns auf eine Untersuchung, welche unabhängig vom Koordinatenwinkel für beide Arten von Parallelkoordinaten Geltung hat.

Wird die y-Achse eines Parallelkoordinatensystems parallel zu sich selbst um eine auf der x-Achse gemessene Strecke a verschoben, so verkleinern sich hierdurch die Abscissen um diese Größe a, wenn die Verschiebung nach der Seite der positiven x vor sich geht; sie nehmen dagegen um dieselbe Strecke zu, sobald die Verschiebung im entgegengesetzten Sinne stattfindet. Bezeichnen wir mit x die auf die anfängliche y-Achse bezogene Abscisse eines beliebigen Punktes, dagegen mit x_1 die entsprechende Entfernung desselben Punktes von der neuen Achse, so lassen sich beide Fälle in der Formel

1) $$x = x_1 + a$$

zusammenfassen, wenn nur ein nach der Seite der negativen x liegendes a auch als negative Abscisse in Rechnung gezogen wird. Die Analogie mit der im § 1 besprochenen Verschiebung des Anfangspunktes für Messung der Abstände von Punkten in einer Geraden enthält hierfür den Beweis. — Wird ferner die x-Achse um eine auf der y-Achse gemessene Strecke b parallel zu sich selbst verschoben und bezeichnet man dabei mit y und y_1 die ursprüng-

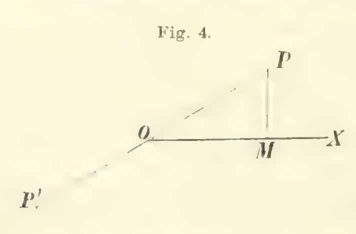
lichen und neuen Ordinaten eines Punktes der Koordinatenebene, so ergibt sich in gleicher Weise, wie vorhin, das Resultat:

$$2) \qquad y = y_1 + b.$$

Insofern a und b die nach der Richtung der x und y gemessenen Verschiebungen beider Achsen bezeichnen, stellen sie zugleich die Verschiebungen des den Achsen gemeinschaftlichen Punktes dar, oder bilden mit anderen Worten die Koordinaten des neuen Anfangspunktes. Bestätigt wird dieses Resultat, wenn man in 1) und 2) nach Anleitung von 5) in § 1 für den neuen Koordinatenanfang $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ setzt. Der Inhalt der Formeln 1) und 2) läßt sich hiernach zu der Regel zusammenfassen, daß bei paralleler Achsenverschiebung jede der beiden ursprünglichen Koordinaten eines Punktes ausgedrückt wird durch die algebraische Summe aus der entsprechenden neuen Koordinate desselben Punktes und der des neuen Anfanges.

Zu einer von dem Vorigen wesentlich verschiedenen Methode, die Lage eines Punktes in einer Ebene zu bestimmen, gelangt man durch Vertauschung der parallel mit sich selbst verschiebbaren Linie, welche bei Anwendung der Parallelkoordinaten alle Punkte der Ebene in sich aufnehmen muß, mit einer um einen festen Punkt drehbaren Geraden. Dies geschieht in den sogenannten Polarkoordinaten, welche die Lage eines jeden Punktes der Koordinatenebene durch seinen Abstand von einem festen Punkte — dem Pol — und den Winkel ausdrücken, den seine geradlinige Entfernung vom Pole mit einer festen durch den Pol gelegten Achse (einem vom Pol ausgehenden Strahl) einschließt. Stellt nämlich OX in Fig. 4 die Achse des Polarkoordinatensystems dar, die wir uns im Pole O begrenzt, nach X zu aber unbegrenzt vorzustellen haben, so wird die Lage des Punktes P durch den Abstand OP — seinen Radiusvektor oder Polabstand — bestimmt, wenn außerdem der Winkel XOP gegeben ist, den dieser Polabstand mit der Achse bildet, nebst der Drehrichtung, in welcher dieser Winkel gemessen werden soll. Wir wollen den Polabstand OP mit r und den Winkel XOP,

Fig. 4.



welcher die Anomalie, die Amplitude oder auch der Polwinkel genannt wird, mit φ bezeichnen: r und φ bilden dann die Polarkoordinaten des Punktes P.

Läßt man den Winkel φ immer in derselben Drehrichtung von OX aus von 0 bis 360° wachsen, so geht der bewegliche Strahl OP, der hierbei von O nach P hin unbegrenzt angenommen werden muß, durch alle Punkte der Ebene hindurch, ohne daß er rückwärts über O hinaus verlängert zu werden braucht. Haben also z. B. die in eine Gerade zusammenfallenden Strecken OP und OP' dieselbe Größe, so kommen den Punkten P und P' gleiche Werte von r zu, während der Polwinkel von P' um 180° größer ist, als der des Punktes P. Solange es daher nur gilt, die Lage aller Punkte der Ebene durch Polarkoordinaten zu bestimmen, können negative Leitstrahlen ebensowohl ausgeschlossen werden, als Polwinkel außerhalb der Grenzen 0 bis 360°. Sollen dagegen alle möglichen Werte von r und φ, wie sie sich z. B. als Wurzeln einer Gleichung ergeben können, geometrisch gedeutet werden, so ist es auch nötig, negative Werte von r und φ, sowie Winkel zuzulassen, die eine volle Umdrehung überschreiten. Negative Leitstrahlen sind hierbei in Übereinstimmung mit den bei den Parallelkoordinaten getroffenen Bestimmungen als entgegengesetzt gerichtete Strecken zu deuten: negative Polwinkel entsprechen einer entgegengesetzten Drehrichtung: Winkelwerte endlich, welche über eine Umdrehung hinausgehen, werden durch die Bemerkung erledigt, daß, wenn man einen Winkelschenkel festhält und dem andern eine volle Umdrehung, sei es nach der einen oder andern Seite, gibt, dadurch immer die ursprüngliche Schenkellage wieder hergestellt wird.

Zwischen den Polar- und den rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes finden sehr einfache Beziehungen statt, wenn man den Pol mit dem Koordinatenanfange des rechtwinkligen Systems und die Achse der Polarkoordinaten mit der positiven Seite der x-Achse zusammenfallen läßt, wobei die Größe des Winkels φ in der Drehrichtung von OX aus nach der Seite der positiven y hin wachsen soll. Aus Fig. 4, worin unter den gegebenen Bedingungen OM und MP die rechtwinkligen Koordinaten des Punktes P darstellen, ergibt sich dann unmittelbar:

$$3)\qquad x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Die allgemeine Gültigkeit dieser Beziehungen zeigt sich, sobald man in Fig. 2 die Polabstände der vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 konstruiert, wobei, wenn der Polwinkel von P_1 mit α bezeichnet wird, die Polwinkel der drei übrigen Punkte die Werte $180^0 - \alpha$, $180^0 + \alpha$ und $360^0 - \alpha$ erhalten. Beschränkt man sich zunächst auf absolute r und Werte von φ zwischen den Grenzen 0 und 360^0, so bleiben hierbei r und die absoluten Werte von x und y ungeändert, während die früher angegebenen verschiedenen Vorzeichen der rechtwinkligen Koordinaten der vier mit P bezeichneten Punkte aus den Vorzeichen der Sinus und Kosinus ebenfalls richtig hervorgehen; es bleibt also auch die Richtigkeit der obigen Formeln bestehen. Werden nun negative Werte von r aufgenommen, so führen die Koordinatenbezeichnungen $-r$ und φ, sowie $+r$ und $180^0 + \varphi$ zu derselben Lage eines Punktes; die Vertauschung dieser beiderseitigen Werte ist aber ohne Einfluß auf die Richtigkeit der Gleichungen 3), weil dabei beide Faktoren der rechten Teile derselben gleichzeitig ihre Vorzeichen ändern. Was endlich negative Werte des Winkels φ betrifft, sowie solche Werte, welche 360^0 überschreiten, so lassen sich dieselben durch Hinzu- und Hinwegnehmen einer ganzen Anzahl von Umdrehungen immer auf Winkel zurückführen, welche zwischen den Grenzen 0 und 360^0 enthalten sind. Dabei bleibt aber die Schenkellage und hiermit auch die Größe der trigonometrischen Funktionen ungeändert; die Formeln 3) bleiben also zu Recht bestehen.

Sowie diese Gleichungen dazu dienen, um von den gegebenen Polarkoordinaten eines Punktes zu seinen rechtwinkligen überzugehen, so erhält man Formeln zur Lösung der entgegengesetzten Aufgabe, wenn man die ersteren auf r und φ reduziert. Werden nämlich beide Gleichungen quadriert und addiert, so entsteht

$$4)\qquad r^2 = x^2 + y^2, \text{ also } r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

während man durch Division zu der Gleichung

$$5)\qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

gelangt. Die Unbestimmtheit, welche die Formeln 4) und 5) sowohl durch das doppelte Vorzeichen der Quadratwurzel als durch die Vieldeutigkeit eines durch seine Tangente gegebenen Winkels herbeiführen, liegt in der Natur der Sache, wird aber dadurch be-

seitigt, daß durch die besonderen Vorzeichen von r und φ im voraus der Quadrant gegeben ist, in welchem der durch r und φ zu bestimmende Punkt gelegen sein muß.

Zur Ermittelung des Zusammenhangs zwischen den schiefwinkligen und den Polarkoordinaten eines Punktes bedienen wir uns des aus den Elementen der Trigonometrie bekannten Projektionssatzes, den wir in der Form voraussetzen: Die Projektion $A'B'$ einer Strecke AB auf eine Gerade l ist gleich der algebraischen Summe aus den Projektionen der Seiten irgend eines gebrochenen Linienzugs, der A mit B verbindet.

Dabei müssen die Strecken der Geraden l ebenso, wie wir es bei Koordinaten kennen gelernt haben, in Bezug auf ihr Vorzeichen unterschieden werden, indem man z. B. den Strecken $A'B'$ und $C'D'$ der Geraden l gleiche oder ungleiche Zeichen zuschreibt, je nachdem die Strecken von A' nach B', bezw. von C' nach D' durch gleich- oder entgegengesetzt gerichtete Bewegungen zurückgelegt werden.

Fig. 5.

Zieht man von A (Fig. 5) aus eine Gerade l_1 parallel zu l und in der Richtung, in der auf l positive Bewegungen ausgeführt werden, und bezeichnet mit α den Winkel, den l_1 um A gegen die Uhrzeigerrichtung beschreiben muß, um in die Lage AB zu kommen, so ist auch dem Vorzeichen nach

$$A'B' = AB\cos\alpha.$$

Haben $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$ dieselbe Bedeutung für $AC, CD, DE, \cdots$, so ist auch

$$A'C' = AC\cos\alpha_1, \quad C'D' = CD\cos\alpha_2, \quad D'E' = DE\cos\alpha_3, \cdots.$$

Setzt man dies in den Projektionssatz ein

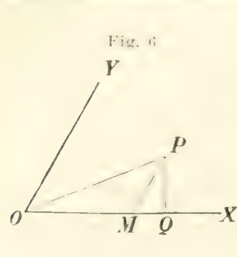
$$A'B' = A'C' + C'D' + D'E' + \cdots,$$

so geht er über in

$$6)\quad AB\cos\alpha = AC\cos\alpha_1 + CD\cos\alpha_2 + DE\cos\alpha_3 + \cdots.$$

Wendet man diesen Satz auf das Dreieck OMP an und ersetzt l zunächst durch die Absissenachse, so hat man, wenn

$$PQ \perp OX,\quad XOP = \varphi,\quad XOY = \omega \text{ ist:}$$



$$OP \cos \varphi = OM + MP \cos \omega;$$

ersetzt man l ferner durch die Gerade QP, so sind in der Gleichung

$$OP \cos \alpha = OM \cos \alpha_1 + MP \cos \alpha_2$$

die Winkel α, α_1 und α_2 der Reihe nach durch $270^0 + \varphi$, 90^0 und $270^0 - \omega$ zu ersetzen; man erhält daher

$$OP \sin \varphi = MP \sin \omega .$$

Setzt man hierin schließlich für OP, OM, MP der Reihe nach r, x, y, so hat man die für jede Lage von P und für jedes ω gültigen Gleichungen:

7) $$r \cos \varphi = y \cos \omega + x, \quad r \sin \varphi = y \sin \omega .$$

Wird hierin auf x und y reduziert, so folgt:

8) $$x = \frac{r \sin (\omega - \varphi)}{\sin \omega}, \quad y = \frac{r \sin \varphi}{\sin \omega} .$$

Werden ferner die beiden Gleichungen 6) quadriert und addiert, so erhält man:

9) $$r^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos \omega ,$$

während man durch Division derselben beiden Gleichungen zu dem Resultate

10) $$\tan \varphi = \frac{y \sin \omega}{y \cos \omega + x}$$

gelangt.

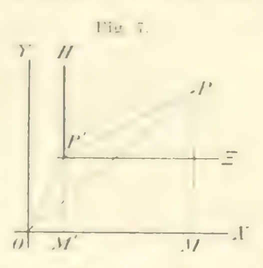
§ 3. Aufgaben.

Durch die bis jetzt gewonnenen Koordinatenbegriffe nebst ihren gegenseitigen Beziehungen sind wir in den Stand gesetzt, mehrfache Aufgaben zu lösen. Folgende mögen hier Platz finden.

I. Durch die gegebenen Koordinaten zweier Punkte P und P' ihre Entfernung $P'P$ auszudrücken.

A. Bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten (Fig. 7).

Es seien x und y die rechtwinkligen Koordinaten OM und MP des Punktes P und x', y' die entsprechenden Größen für P'; ferner werde die Entfernung $P'P$ mit e bezeichnet.



Wir verschieben die gegebenen Koordinatenachsen OX und OY parallel zu sich selbst in die Lage von $P'\Xi$ und $P'H$, so daß P' zum neuen Koordinatenanfange wird, und bezeichnen mit ξ und η die auf dieses neue System bezogenen Koordinaten des Punktes P. Dann ist nach Formel 4) im § 2

$$e^2 = \xi^2 + \eta^2 .$$

Zugleich entsteht aus 1) und 2) desselben Paragraphen

$$x = \xi + x' \quad \text{und} \quad y = \eta + y' ,$$

also auch:

$$\xi = x - x' \quad \text{und} \quad \eta = y - y' .$$

Die Verbindung dieser Formeln gibt:

1) $$e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$$

oder

$$e = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} .$$

Die allgemeine Geltung der zu Grunde gelegten Formeln läßt dieses Resultat als unabhängig von der besonderen Lage der Punkte P und P' erscheinen.

B. Ist das Koordinatensystem ein schiefwinkliges mit dem Koordinatenwinkel ω, so führt das im vorigen angewendete Verfahren bei Benutzung der Gleichung 8) in § 2 zu dem Resultate:

2) $$e^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + 2\,(x - x')\,(y - y')\cos\omega .$$

C. Sind endlich P und P' durch ihre Polarkoordinaten r, φ und r', φ' bestimmt, so daß z. B. $OP = r$ und $\angle MOP = \varphi$, so läßt sich die in diesen Werten ausgedrückte Entfernung leicht aus der Gleichung 1) ableiten. Werden nämlich die hierin enthaltenen Klammern aufgelöst, so ergibt sich durch Verwendung der in den Formeln 3) und 4) des vorigen Paragraphen enthaltenen Werte mit Hilfe der goniometrischen Beziehung

$$\cos(\varphi' - \varphi) = \cos\varphi' \cdot \cos\varphi + \sin\varphi' \cdot \sin\varphi$$

die Formel

3) $$e^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\varphi' - \varphi).$$

Wenn man dasselbe unmittelbar dem Dreiecke POP' entnimmt, so läßt sich der im vorigen enthaltene Gedankengang auch umkehren. Setzt man nämlich den der Figur entnommenen Wert von e^2 in Nr. 3) dem unter 1) aufgestellten gleich, so erhält man nach Auflösung der Klammern und Streichung der nach der Formel 4) in § 2 gleichen Werte zunächst:

$$2rr' \cos(\varphi' - \varphi) = 2xx' + 2yy'.$$

Mit Benutzung der Gleichungen 3) des vorigen Paragraphen gelangt man hieraus zu der goniometrischen Formel für den Kosinus der Winkeldifferenz zurück.

II. **Aus den Koordinaten der Punkte P und P' den Flächeninhalt des zwischen diesen beiden Punkten und dem Koordinatenanfange enthaltenen Dreiecks zu berechnen** (Fig. 7).

Behalten wir alle früheren Bezeichnungen bei und setzen außerdem die Fläche des zu berechnenden Dreiecks $= \Delta$, so gibt bei Anwendung von Polarkoordinaten die Figur für die doppelte Fläche den Ausdruck

4) $$2\Delta = rr' \sin(\varphi' - \varphi),$$

unter der Voraussetzung, daß $\varphi' > \varphi$ und dabei der Unterschied der beiden Polwinkel kleiner als 180^0 ist. Überschreitet der Unterschied den letzteren Wert, so hat man $\varphi - \varphi'$ statt $\varphi' - \varphi$ zu setzen, wenn man ein negatives Resultat vermeiden will, welches übrigens seinem absoluten Werte nach den gesuchten Flächeninhalt ebenfalls richtig darstellen würde. Die Vergleichung der beiden im vorigen erwähnten Fälle ergibt, daß die Gleichung 4) allgemein die Dreiecksfläche darstellt, sobald man mit P' denjenigen der beiden Punkte bezeichnet, welcher bei Umgehung des Dreiecksumfanges in der für die Messung des Winkels φ festgestellten Drehrichtung dem Koordinatenanfang O vorhergeht.

Wollen wir jetzt zu rechtwinkligen Koordinaten übergehen, so ist $\sin(\varphi' - \varphi)$ zu entwickeln, worauf die Formeln 3) des vorigen Paragraphen benutzt werden können. Wir erhalten:

$$2\Delta = r\cos\varphi \cdot r'\sin\varphi' - r\sin\varphi \cdot r'\cos\varphi'$$

und hieraus:

$$5)\qquad 2\Delta = xy' - x'y.$$

Fig. 7 führt hierzu unmittelbar, wenn man das Dreieck $PP'O$ als Differenz des Vierecks $OMPP'$ und des rechtwinkligen Dreiecks OMP auffaßt und ersteres wieder in das rechtwinklige Dreieck $OM'P'$ und das Trapez $M'MPP'$ zerlegt. Dann ist

$$2\Delta = x'y' + (y+y')(x-x') - xy$$

und die Ausführung der in den Klammern angedeuteten Multiplikation leitet zu der Gleichung 5) zurück.

Der letztere Weg ist noch insofern von Interesse, als, wenn man auf ihm zu der genannten Formel gelangt und dieselbe dann mit der oben gewonnenen Gleichung 4) zusammenstellt, sich hierdurch der Ausdruck für den Sinus einer Winkeldifferenz finden läßt. Man erhält nämlich bei Division durch $r'r$:

$$\sin(\varphi'-\varphi) = \frac{x}{r}\cdot\frac{y'}{r'} - \frac{x'}{r'}\cdot\frac{y}{r},$$

und dies gibt mit Benutzung der schon mehrfach gebrauchten Beziehungen zwischen Polar- und rechtwinkligen Koordinaten:

$$\sin(\varphi'-\varphi) = \sin\varphi'\cdot\cos\varphi - \cos\varphi'\cdot\sin\varphi.$$

Bei Anwendung schiefwinkliger Koordinaten mit dem Koordinatenwinkel ω sind in der obigen Gleichung

$$2\Delta = r\cos\varphi\cdot r'\sin\varphi' - r\sin\varphi\cdot r'\cos\varphi'$$

die in Nr. 6 des vorigen Paragraphen enthaltenen Werte zu verwenden. Nach Streichung der sich aufhebenden Glieder erhält man

$$6)\qquad 2\Delta = (xy' - x'y)\sin\omega.$$

III. Wir sind jetzt in den Stand gesetzt, den Flächeninhalt eines beliebigen Dreiecks aus den Parallelkoordinaten seiner drei Eckpunkte zu berechnen.

Die Eckpunkte mögen P_1, P_2, P_3, ihre Koordinaten der Reihe nach x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 heißen; die Dreiecksfläche werde wieder mit Δ bezeichnet. Verschieben wir beide Achsen parallel zu sich selbst, bis der Punkt P_3 Koordinatenanfang wird, so sollen ξ_1, η_1 und ξ_2, η_2 die auf das neue System bezogenen Koordinaten der Punkte P_1 und P_2 sein.

Wird zunächst ein rechtwinkliges Koordinatensystem angewendet, so ergibt sich aus Formel 5):

$$2\Delta = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1.$$

Nach Analogie der bei Aufgabe I. unter *A.* angestellten Betrachtungen ist aber

$$\xi_1 = x_1 - x_3, \qquad \eta_1 = y_1 - y_3,$$
$$\xi_2 = x_2 - x_3, \qquad \eta_2 = y_2 - y_3;$$

folglich erhält man:

$$2\varDelta = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)$$

und nach Ausführung der Rechnung und geänderter Ordnung der einzelnen Glieder:

$$7) \qquad 2\varDelta = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2).$$

Die aus dreimal drei Elementen $u_1\, v_1\, w_1$, $u_2\, v_2\, w_2$, $u_3\, v_3\, w_3$ gebildete Größe

$$u_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + u_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + u_3(v_1 w_2 - v_2 w_1)$$

führt den Namen Determinante der neun Elemente, und wird mit

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix},$$

oder, wo keine Verwechselung zu befürchten ist, noch kürzer symbolisch mit

$$|u_1\; v_2\; w_3|$$

bezeichnet*. Hiernach ist

$$8) \qquad 2\varDelta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Die absoluten Werte der rechten Seiten der Gleichungen 7) oder 8) geben in jedem Falle die doppelte Dreiecksfläche. Aus

---

* Als Determinante aus vier, neun, sechzehn u. s. w. Elementen bezeichnet man die Größen

$$[a_i\, b_k] = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_k & b_k \end{vmatrix} = a_i b_k - a_k b_i;$$

$$[a_i\, b_k\, c_l] = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_k & b_k & c_k \\ a_l & b_l & c_l \end{vmatrix} = a_i[b_k\, c_l] + a_k[b_l\, c_i] + a_l[b_i\, c_k];$$

$$[a_i\, b_k\, c_l\, d_m] = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i \\ a_k & b_k & c_k & d_k \\ a_l & b_l & c_l & d_l \\ a_m & b_m & c_m & d_m \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_i[b_k\, c_l\, d_m] - a_k[b_l\, c_m\, d_i] \\ + a_l[b_m\, c_i\, d_k] - a_m[b_i\, c_k\, d_l] \\ \text{u. s. w.} \end{matrix}$$

der oben bei Gleichung 1) gemachten Bemerkung kann leicht abgeleitet werden, daß jedesmal ein positives Ergebnis entsteht, wenn die Drehrichtung, mit der man sich von P_1 über P_2 nach P_3 bewegt, mit der übereinstimmt, durch welche man die positive Seite der x-Achse auf dem kürzesten Wege in die Lage der positiven y-Achse überführt. Um auch im anderen Falle volle Übereinstimmung zu erzielen, wollen wir Dreiecksflächen nicht bloß ihrer absoluten Größe, sondern auch ihrem Vorzeichen nach unterscheiden, indem wir einem Dreiecke ABC eine positive oder negative Flächenzahl zuschreiben, je nachdem die Bewegung von A über B nach C mit der oben angegebenen Drehrichtung übereinstimmt oder nicht. Hiernach ist

$$P_1 P_2 P_3 = P_2 P_3 P_1 = P_3 P_1 P_2 = - P_1 P_3 P_2 = - P_3 P_2 P_1 = - P_2 P_1 P_3;$$

in Übereinstimmung damit erkennt man leicht, daß

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

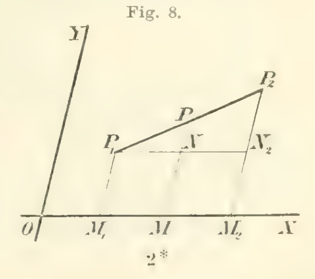
Wiederholen wir die vorhergehende Untersuchung für ein schiefwinkliges Koordinatensystem, so ergibt sich

$$9) \qquad 2\varDelta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \sin\omega,$$

worin ω den Koordinatenwinkel bezeichnet.

IV. Eine im folgenden mehrfach zur Anwendung kommende Aufgabe verlangt: den Mittelpunkt P der Strecke zweier durch Parallelkoordinaten bestimmten Punkte P_1 und P_2 in Koordinaten desselben Systems auszudrücken.

Fig. 8.



Um sogleich zu möglichst allgemeinen Resultaten zu gelangen, geben wir dem Koordinatenwinkel XOY in Fig. 8 eine beliebige Größe; die Koordinaten der Punkte P, P_1 und P_2 werden wie in der vorigen Aufgabe bezeichnet.

Hat $P_1 N_2$ die Richtung OX, so ist

$$P_1 N = \tfrac{1}{2} P_1 N_2, \quad NP = \tfrac{1}{2} N_2 P_2.$$

Da nun

$$P_1 N = M_1 M = x - x_1, \qquad P_1 N_2 = M_1 M_2 = x_2 - x_1,$$
$$NP = y - y_1, \qquad N_2 P_2 = y_2 - y_1,$$

so ergibt sich zunächst

$$x - x_1 = \tfrac{1}{2}(x_2 - x_1), \qquad y - y_1 = \tfrac{1}{2}(y_2 - y_1).$$

Hieraus erhält man für x und y die Formeln

10) $$x = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_1 + y_2).$$

V. Verallgemeinern wir die vorhergehende Aufgabe dahin, die Koordinaten des Punktes P zu bestimmen, der die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnisse λ teilt, so daß also

$$P_1 P : PP_2 = \lambda.$$

Nehmen wir zunächst P als innern Teilpunkt der Strecke $P_1 P_2$, also zwischen P_1 und P_2 an, so werden die Strecken $P_1 P$ und PP_2 in derselben Richtung durchlaufen, wenn man die Bewegung in den zuerst genannten Punkten P_1 bez. P anfängt: in diesem Falle haben die Strecken $P_1 P$ und PP_2 dasselbe Vorzeichen, das Teilverhältnis ist daher positiv. Ist dagegen P ein äußerer Teilpunkt, also auf einer der beiden Verlängerungen der Strecke $P_1 P_2$ enthalten, so haben die Strecken $P_1 P$ und PP_2 ungleiche Vorzeichen, das Teilverhältnis ist negativ.

Für die innere Teilung hat man

$$M_1 M : MM_2 : M_1 M_2 = NP : (N_2 P_2 - NP) : N_2 P_2$$
$$= P_1 P : PP_2 : P_1 P_2 = \lambda : 1 : (1 + \lambda).$$

Dies ergibt

$$x - x_1 = \frac{\lambda}{1 + \lambda}(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = \frac{\lambda}{1 + \lambda}(y_2 - y_1),$$

und hieraus folgen die Formeln

11) $$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß bei der äußeren Teilung dieselben Formeln gelten. Denn alsdann ist die algebraische Summe $P_1 P + PP_2$ eine wirkliche Differenz, und ergibt wieder die Strecke $P_1 P_2$, auch dem Vorzeichen nach.

Ist λ eine absolute Zahl, so ergeben die Formeln

$$12)\quad \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, & y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \\[2ex] x' = \dfrac{x_1 - \lambda x_2}{1-\lambda}, & y' = \dfrac{y_1 - \lambda y_2}{1-\lambda} \end{cases}$$

ein Punktpaar P und P', das die Strecke $P_1 P_2$ in Verhältnissen teilt, die nur dem Vorzeichen nach unterschieden sind.

Aus 12) folgt

$$(1+\lambda)x = x_1 + \lambda x_2, \qquad (1+\lambda)y = y_1 + \lambda y_2,$$
$$(1-\lambda)x' = x_1 - \lambda x_2, \qquad (1-\lambda)y' = y_1 - \lambda y_2;$$

$$13)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{x + \mu x'}{1+\mu}, & y_1 = \dfrac{y + \mu y'}{1+\mu} \\[2ex] x_2 = \dfrac{x - \mu x'}{1-\mu}, & y_2 = \dfrac{y - \mu y'}{1-\mu}, \end{cases}$$

$$\text{wobei } \mu = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}.$$

Wenn also das Paar PP' die Strecke $P_1 P_2$ innen und außen in demselben Verhältnisse teilt, so teilt auch umgekehrt das Paar $P_1 P_2$ die Strecke PP' innen und außen in demselben Verhältnisse; zwei solche Paare werden als harmonische Paare bezeichnet.

Diese Resultate finden eine weitere Anwendung in der folgenden Aufgabe, die als eine neue Verallgemeinerung von Nr. IV betrachtet werden kann:

V. Wenn die n Punkte $P_1, P_2, \cdots P_{n-1}, P_n$ nach ihrer Lage gegen ein Parallelkoordinatensystem gegeben sind, so wird nach der geometrischen Bedeutung des Punktes P gefragt, dessen Koordinaten aus denen der gegebenen Punkte $P_1, P_2, \cdots P_n$ nach den Formeln abgeleitet sind:

$$14)\quad x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_n y_n}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n}.$$

Setzen wir

$$x' = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_{n-1} x_{n-1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}}, \quad y' = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_{n-1} y_{n-1}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}};$$

so ergibt sich

$$x = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1})x' + \lambda_n x_n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}) + \lambda_n}, \quad y = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1})y' + \lambda_n y_n}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}) + \lambda_n}.$$

Hiernach teilt P die Strecke $P'P_n$ im Verhältnisse

$$\lambda_n : (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-1}).$$

Wird der Reihe nach $n = 2, 3, 4$ u. s. f., gesetzt, so gelangt man zu folgender Konstruktion des Punktes P. Man zeichne

den Teilpunkt P' der Strecke $P_1\ P_2$ nach dem Verhältnisse $\lambda_2 : \lambda_1$:
" " P'' " " $P'\ P_3$ " " " $\lambda_3 : (\lambda_1 + \lambda_2)$:
" " P''' " " $P''\ P_4$ " " " $\lambda_4 : (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)$:
" " P'''' " " $P'''\ P_5$ " " " $\lambda_5 : (\lambda_1 + \cdots + \lambda_4)$:
u. s. f.

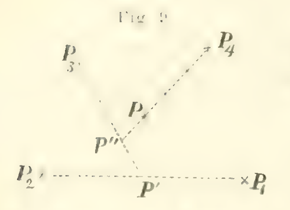


Fig. 9.

In Fig. 9 ist diese Konstruktion für den besonderen Fall $n = 4$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ durchgeführt.

Es ist zu beachten, daß die im vorigen gefundene konstruktive Darstellung des Punktes P sich völlig unabhängig von der besonderen Lage des der Aufgabe zu Grunde gelegten Koordinatensystems zeigt. Sind daher für irgend zwei Achsen die in beliebigen Richtungen gemessenen Abstände des Punktes P aus den in denselben Richtungen gemessenen Abständen der Punkte $P_1, P_2, \cdots P_n$ nach den Formeln 14) berechnet und dadurch die Lage dieses Punktes bestimmt, so gelten auch dieselben Formeln für die in irgend welcher Richtung bis an irgend welche andere Gerade der Ebene gemessenen Abstände der Punkte $P_1, P_2, \cdots P_n$ und P. Da ferner die Werte 14) sich durch Vertauschung der in Zähler und Nenner stehenden Summenglieder nicht ändern, so folgt, daß man immer wieder zu demselben Punkt gelangt, gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die gegebenen Punkte bei der Konstruktion verwendet. Die Mechanik lehrt, daß P der Schwerpunkt für die in den Punkten $P_1, P_2, \cdots P_n$ liegenden Massen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ ist.

§ 4. Änderung der Parallelkoordinaten.

Häufig wird es bei analytischen Untersuchungen notwendig, die Koordinaten zu ändern, d. h. die auf ein gegebenes System bezogenen Koordinaten eines Punktes in Koordinaten eines neuen Systems auszudrücken. Die einfachsten hierher gehörigen Fälle sind im § 2 besprochen und in den vorigen Aufgaben zur Anwendung gebracht worden. Es erübrigt uns noch eine Ergänzung, wobei wir uns jedoch lediglich auf Parallelkoordinaten beschränken, was deshalb völlig ausreichend ist, weil die wenig vorkommende Aufgabe der Änderung von Polarkoordinaten leicht durch Vermittelung rechtwinkliger Parallelkoordinaten bewältigt werden kann.

Man gelangt von einem gegebenen Parallelkoordinatensysteme zu jedem andern in derselben Ebene gelegenen durch parallele Verschiebung und durch Drehung der Achsen, von welchen zwei Fällen der erstere bereits im § 2 erledigt wurde. Was die Achsendrehung betrifft, so betrachten wir zunächst den Übergang von einem rechtwinkligen Systeme zu einem andern mit demselben Anfangspunkte.

Die positiven Achsen OX und OY des ursprünglichen Systems mögen durch eine Drehung um den positiven Winkel α in die Lage der positiven Achse OX' und OY' des neuen Systems kommen und es seien OM, MP bez. OM', $M'P$ die Koordinaten eines Punktes P im alten, bez. neuen System. Projiziert man die gebrochene Linie $OM'P$ zunächst auf OX und dann auf MP, so erhält man OM bez. MP. Da nun OM' und $M'P$ mit OX die Winkel α und $90^0 + \alpha$, mit MP dagegen die Winkel $270^0 + \alpha$ und α bilden, so hat man nach dem Projektionssatze (vergl. S. 13) die Formeln

Fig. 10.

$$x = \cos\alpha \cdot x' + \cos(90^0 + \alpha) \cdot y',$$
$$y = \cos(270^0 + \alpha) \cdot x' + \cos\alpha \cdot y'.$$

Nach bekannten goniometrischen Formeln ergibt sich hieraus

$$1) \qquad \begin{cases} x = \cos\alpha \cdot x' - \sin\alpha \cdot y', \\ y = \sin\alpha \cdot x' + \cos\alpha \cdot y'. \end{cases}$$

Wir wenden uns nun zum Übergange aus einem schiefwinkligen Systeme in ein anderes schiefwinkliges mit demselben Nullpunkte.

Wir können hier dieselben Bezeichnungen verwenden, wie vorher, und fügen nur die neue Bestimmung hinzu, daß die Ordinatenachse OY' des neuen Systems mit OX den Winkel β bilde. Projizieren wir jetzt die gebrochene Linie $OM'P$ auf zwei Gerade, die der Reihe nach senkrecht zu OY bez. OX sind, so erhalten wir die Strecken OM'' und ON'', und es ergeben sich sogleich die Formeln

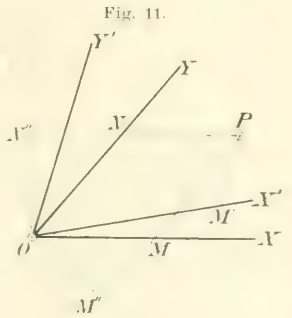


Fig. 11.

$$\cos(90^0 - \omega)\cdot x = \cos(90^0 - \omega + \alpha)\cdot x' + \cos(90^0 - \omega + \beta)\cdot y',$$
$$\cos(90^0 - \omega)\cdot y = \cos(270^0 + \alpha)\cdot x' + \cos(270^0 + \beta)\cdot y'.$$

Hieraus folgen

$$2)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega}\cdot x' + \dfrac{\sin(\omega - \beta)}{\sin\omega}\cdot y', \\[2ex] y = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\omega}\cdot x' + \dfrac{\sin\beta}{\sin\omega}\cdot y'. \end{cases}$$

Hat der Nullpunkt des neuen Systems in Bezug auf das alte die Koordinaten a und b, so hat man die Änderungsformeln

a) *beim Übergange von einem rechtwinkligen zu einem andern rechtwinkligen Systeme:*

$$3)\qquad \begin{cases} x = a + \cos\alpha\cdot x' - \sin\alpha\cdot y', \\ y = b + \sin\alpha\cdot x' + \cos\alpha\cdot y'; \end{cases}$$

beim Übergange von einem schiefwinkligen Systeme zu einem andern schiefwinkligen:

$$4)\qquad \begin{cases} x = a + \dfrac{\sin(\omega - \alpha)}{\sin\omega}\cdot x' + \dfrac{\sin(\omega - \beta)}{\sin\omega}\cdot y', \\[2ex] y = b + \dfrac{\sin\alpha}{\sin\omega}\cdot x' + \dfrac{\sin\beta}{\sin\omega}\cdot y'. \end{cases}$$

Setzt man $\omega = 90^0$, $\beta = \alpha + 90^0$, so gehen die Formeln 4) in 3) über.

Es ist bemerkenswert, daß diese Formeln in Beziehung auf die in ihnen enthaltenen Koordinaten sämtlich *Gleichungen ersten Grades* darstellen.

Zweites Kapitel.

Die gerade Linie.

§ 5. Gleichungsformen der geraden Linie.

Die charakteristische Eigenschaft der geraden Linie, daß sie in allen ihren Punkten nach einer und derselben Richtung verläuft, läßt sich am einfachsten in der Sprache der analytischen Geometrie ausdrücken, wenn man irgend einen ihrer Punkte zum Pole eines Polarkoordinatensystems wählt. Bezeichnet unter dieser Voraussetzung α den zwischen 0 und 180^0 gelegenen und in der Drehrichtung der Polwinkel gemessenen Winkel, welchen die Gerade mit der Achse des benutzten Systems bildet, so wird die Lage aller ihrer Punkte durch die Gleichung

$$\varphi = \alpha$$

ausgedrückt, sobald man ebensowohl negative als positive Leitstrahlen zuläßt.

Gehen wir jetzt zu einem Parallelkoordinatensystem über, dessen positive Seite der x-Achse unter Beibehaltung des Poles als Koordinatenanfang mit der Achse des Polarsystems zusammenfällt, so folgt bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten aus Nr. 5) im § 2

$$\frac{y}{x} = \tan \alpha$$

als diejenige Gleichung, durch welche die beiden Koordinaten jedes einzelnen Punktes der in Rede stehenden Linie voneinander abhängen. Der Winkel α ist hierbei spitz oder stumpf, je nachdem die durch den Koordinatenanfang gehende Gerade innerhalb der beiden von den Achsen gebildeten Felder liegt, welchen gleiche Vorzeichen der Koordinaten zukommen, oder im andern Falle die

beiden übrigen Felder durchschneidet. Bezeichnen wir zur Abkürzung $\tan\alpha$ mit dem Buchstaben A, so geht die obige Gleichung in

1) $$y = Ax$$

über. — Genau dieselbe Gleichungsform kann auch benutzt werden, um bei Anwendung schiefwinkliger Koordinaten Abscisse und Ordinate jedes Punktes voneinander abhängig zu machen, der sich in einer durch den Anfangspunkt des Systems gezogenen Geraden befindet. Lassen wir nämlich der x-Achse die oben angegebene Lage und bezeichnen wie früher den Koordinatenwinkel mit ω, so ergibt sich für diesen Fall aus den Formeln 7) im § 2:

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)},$$

wo wieder $\frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}$ einen für den ganzen Verlauf der geraden Linie unveränderlichen Wert besitzt, den wir nur mit A zu bezeichnen brauchen, um die Gleichung 1) zu erhalten. Setzen wir $\omega - \alpha = \beta$, so ist β der von der y-Achse und der Geraden eingeschlossene Winkel, der aber negativ in Rechnung gezogen werden muß, wenn $\alpha > \omega$, d. h. wenn die Gerade diejenigen von den Achsen gebildeten Felder durchschneidet, in welchen den Koordinaten der darin enthaltenen Punkte verschiedene Vorzeichen zugehören. Der Zahlwert A hat mit Einführung der gewählten Bedeutung die allgemeine Bedeutung:

2) $$A = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta},$$

und es ist hierin immer $\alpha + \beta = \omega$, ferner α zwischen den Grenzen 0 und 180^0 und β zwischen ω und $\omega - 180^0$ enthalten. Wir wollen der beständigen oder konstanten Größe A, da sie einzig von der Richtung der geraden Linie gegen das Koordinatensystem abhängt, den Namen Richtungskonstante geben. — Das Verhältnis der Sinus der Teile eines Winkels, in die er durch einen vom Scheitel ausgehenden Strahl zerlegt wird, nennt man das diesem Strahle zugehörige Sinusteilverhältnis des Winkels. Wir können daher sagen: Die Richtungskonstante einer den Nullpunkt enthaltenden Geraden ist das Sinusverhältnis, in dem sie den Koordinatenwinkel teilt.

In Übereinstimmung mit der am Schlusse von § 1 gemachten Bemerkung nennen wir die Formel $y = Ax$, welche auch in $x = \frac{y}{A}$

umgeformt werden kann, die Gleichung einer durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden, insofern sie dazu dient, um bei gegebener Richtung der Linie die veränderlichen oder variabelen (laufenden) Koordinaten jedes ihrer Punkte von einander abhängig zu machen. Setzen wir nacheinander $\alpha = 0$ und $\alpha = \omega$, wobei β die Werte ω und 0 annimmt, so geht das erste Mal A in 0 und das andere Mal in ∞ über, und man erhält, wenn man im zweiten Falle die Form $x = \frac{y}{A}$ zur Anwendung bringt,

$$y = 0 \quad \text{und} \quad x = 0$$

als Gleichung der x- und y-Achse, wie schon im § 1 unter Nr. 5) aus dem Begriffe der Koordinaten hergeleitet wurde. — Als ein zweites Beispiel wählen wir die Gleichungen der beiden (aufeinander senkrechten) Geraden, welche den Koordinatenwinkel und seinen Nebenwinkel halbieren. Für die erste derselben ist $\beta = \alpha$, also $A = 1$, für die zweite $\beta = -(180^0 - \alpha)$ und $A = -1$, wonach sich

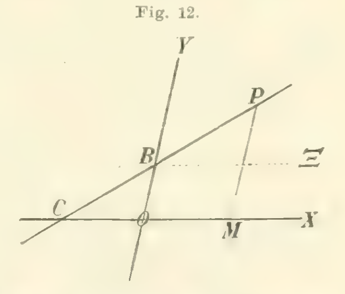
$$y = x \quad \text{und} \quad y = -x$$

als Gleichungen dieser beiden Linien ergeben.

Wir gelangen jetzt dazu, die allgemeine Gleichung einer in beliebigen Punkten die Koordinatenachse schneidenden Geraden festzustellen, wenn wir eine der beiden Achsen parallel zu sich selbst in den Durchschnittspunkt der zu untersuchenden Geraden und der andern Achse verschieben.

CP in Fig. 12 sei die gegebene Linie, welche die Koordinatenachsen in den Punkten C und B schneidet. Verschieben wir die x-Achse in die Lage $B\Xi$, so ist, wenn η die auf das neue System bezogene Ordinate des beliebigen Punktes P, und $OM = x$ seine Abscisse, ferner A die Richtungskonstante der Geraden CP bezeichnet,

Fig. 12.



$$\eta = Ax.$$

Da durch die parallele Achsenverschiebung die zur Bestimmung von A dienenden Winkel nicht geändert werden, so behält die Richtungskonstante auch für die ursprüngliche Lage der x-Achse

ihren Wert bei und wir gelangen nach den bereits oft angewendeten Sätzen für parallele Achsenverschiebung zu dem ursprünglichen Systeme zurück, wenn wir $y = \eta + b$ setzen, wo $b = OB$ die Ordinate des Durchschnittspunktes der Geraden und der y-Achse ausdrückt. Als allgemeine Gleichung der geraden Linie erhalten wir hiernach:

$$3) \qquad y = Ax + b\,.$$

Die von uns eingeführte Bedeutung der konstanten Größe b findet hierin ihre Bestätigung, wenn wir $x = 0$ setzen, indem sich dann $y = b$ als Ordinate des in der y-Achse gelegenen Punktes der Geraden ergibt. In gleicher Weise findet sich, wenn a die Abscisse des in der x-Achse gelegenen Punktes C bezeichnet*, aus der Substitution $y = 0$:

$$4) \qquad Aa + b = 0 \quad \text{oder} \quad A = -\frac{b}{a}\,.$$

Schaffen wir mittels der ersten dieser beiden Formeln aus der Gleichung 3) die Größe b hinweg, so läßt sie sich in

$$5) \qquad x = \frac{y}{A} + a$$

umwandeln. Dieselbe Gleichung entsteht unmittelbar, wenn man anfänglich die x-Achse ungeändert läßt, dagegen die y-Achse parallel zu sich selbst nach C verschiebt.

Die vorhergehenden Entwicklungen der allgemeinen Gleichung der geraden Linie in der Form unter Nr. 3) oder der daraus hergeleiteten unter 5) scheinen insofern noch eine Lücke zu enthalten, als die dabei angewendete Verlegung einer der beiden Koordinatenachsen ihre Anwendbarkeit versagt, wenn die Gerade zur andern Achse parallel liegt. Daß aber auch hier die allgemeinen Formeln ihre Gültigkeit behalten, zeigt sich, wenn wir in 5) $A = \infty$ und in 3) $A = 0$ einsetzen. Die hierdurch gewonnenen Gleichungen

$$x = a \quad \text{und} \quad y = b$$

kommen nämlich auf die bereits in den §§ 1 und 2 für Parallelen zu den Koordinatenachsen gefundenen Formeln zurück.

* Nach der Anlage von Fig. 12 muß darin a als Abscisse eines auf der Seite der negativen x gelegenen Punktes einen negativen Wert erhalten.

In Nr. 3) und 5) wurde die Gleichung der Geraden von der Richtung der Linie (mittels der Konstanten A) und der Lage eines ihrer Punkte (mittels der Konstanten b oder a) abhängig gemacht; zu einer mehr symmetrisch gestalteten Gleichungsform gelangen wir jedoch, wenn wir die Gerade durch ihre beiden in den Achsen gelegenen Punkte bestimmen oder, mit anderen Worten, die Gleichung einzig von den Konstanten a und b abhängig machen. Setzt man hierzu in die Formel $y = Ax + b$ aus Nr. 4 den Wert $A = -\frac{b}{a}$, so läßt sich die entstandene Gleichung leicht in

$$6) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

umgestalten — eine Gleichungsform der geraden Linie, die sich unter anderem noch dadurch empfiehlt, daß die Bedeutung der in ihr enthaltenen beständigen Größen a und b (Koordinaten der Durchschnittspunkte mit den Achsen) von dem angewendeten Koordinatenwinkel völlig unabhängig bleibt. Der Fall des Parallelismus der Geraden zu einer der beiden Achsen ist in dieser Gleichung eingeschlossen, wenn man für ihn den Durchschnittspunkt mit der parallelen Achse in eine unendliche Entfernung versetzt, wie sich aus den Ersetzungen $b = \infty$ oder $a = \infty$ herleiten läßt.

Der allgemeinen Anwendbarkeit der letzten Gleichung steht einzig der Umstand entgegen, daß sie sich nicht unmittelbar für den Fall einer durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden eignet, was ohne alle Rechnung schon daraus folgt, daß dann die beiden zur Bestimmung dienenden Punkte in einen übergehen.

Eine weitere Verallgemeinerung der in Nr. 3) und 6) gewonnenen Gleichungsformen der geraden Linie gewähren die beiden folgenden Grundaufgaben.

I. Es soll die Gleichung einer Geraden gefunden werden, deren Richtung gegen die Achsen bestimmt ist und die durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1$* geht.

Aus den mit den Koordinatenachsen gebildeten Winkeln α und

* Wir nennen zur Abkürzung einen Punkt xy, wenn x und y seine Parallelkoordinaten bezeichnen. Bei Anwendung von Polarkoordinaten kann in gleicher Weise von einem Punkte $r\varphi$ gesprochen werden.

β ergibt sich ohne weiteres die Richtungskonstante $A = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ oder bei Anwendung von rechtwinkligen Koordinaten $A = \tan\alpha$.

Die gesuchte Gleichung der Geraden hat nun nach 3) die Form:

$$y = Ax + b,$$

in welcher der Wert von b unbestimmt bleibt. Die Bedingung, daß x_1 und y_1 die Koordinaten eines Punktes dieser Geraden sein sollen, führt zu der zweiten Gleichung:

$$y_1 = Ax_1 + b,$$

in welcher A und b dieselben Werte wie vorher besitzen müssen, und woraus in Verbindung mit der vorigen Gleichung das unbestimmte b durch Subtraktion entfernt werden kann. Man erhält dann:

7) $$y - y_1 = A(x - x_1)$$

als Resultat der gestellten Aufgabe. Setzt man hierin nacheinander $y = 0$ und $x = 0$, so findet man leicht als Koordinaten für die auf den Achsen gelegenen Punkte der in Rede stehenden Geraden:

8) $$a = x_1 - \frac{y_1}{A}, \quad b = y_1 - Ax_1,$$

welche beiden Werte übrigens nur Umformungen der Gleichungen 5) und 3) darstellen.

II. Es soll die Gleichung derjenigen Geraden gesucht werden, welche die Punkte x_1y_1 und x_2y_2 in sich enthält.

Zu der Gleichung der Geraden

$$y = Ax + b$$

treten hier die beiden Bedingungsgleichungen:

$$y_1 = Ax_1 + b,$$

$$y_2 = Ax_2 + b,$$

aus denen in gleicher Weise, wie in der vorigen Aufgabe,

$$y_1 - y_2 = A(x_1 - x_2)$$

hergeleitet wird. Hieraus findet sich zunächst für die Richtungskonstante der durch die beiden gegebenen Punkte gehenden Geraden:

9) $$A = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},$$

ferner durch Einsetzung dieses Wertes in die Formel 7), welche

die Gleichungen aller den Punkt $x_1 y_1$ enthaltenden Geraden umfaßt, als Gleichung der gesuchten Linie:

$$10) \qquad y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$$

Die Ersetzungen $y = 0$ und $x = 0$ geben für die Koordinaten der beiden auf den Achsen gelegenen Punkte:

$$11) \qquad a = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}, \quad b = \frac{y_2 x_1 - y_1 x_2}{x_1 - x_2}.$$

Man kann zur Gleichung 10) auch von den Entwicklungen des § 3, Nr. 8) oder 9) aus gelangen; denn die Bedingung, daß P auf der Geraden $P_1 P_2$ liegt, ist gleichbedeutend damit, daß das Dreieck PP_1P_2 verschwindet. Hiernach erhält man die Gleichung der Geraden $P_1 P_2$ als verschwindende Determinante

$$12) \qquad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Durch die Entwicklung der Determinante kommt man leicht auf Nr. 10.

§ 6. Zwei Gerade.

Sind zwei gerade Linien durch ihre Gleichungen für Parallelkoordinaten gegeben, so entsteht die Frage nach der gegenseitigen Richtung dieser Linien und, wenn sie sich schneiden, nach der Lage ihres Durchschnittspunktes. Wir beginnen mit der letzten dieser beiden Untersuchungen.

I. Es seien

$$y = A_1 x + b_1,$$
$$y = A_2 x + b_2$$

die Gleichungen der beiden gegebenen Geraden, so müssen für die Koordinaten eines gemeinschaftlichen Punktes beide Formeln gleichzeitig ihre Gültigkeit behalten. Die Berechnung dieser Koordinaten kommt daher einzig darauf hinaus, ein x und y zu finden, welches beiden Gleichungen Genüge leistet. Da wir es hierbei nur mit Gleichungen ersten Grades zu tun haben, so kann die Rechnung für jede der beiden Unbekannten nur einen Wert geben:

sie führt daher zu dem Resultate zurück, daß zwei nicht zusammenfallende Gerade nicht mehr als einen gemeinschaftlichen Punkt besitzen können. Seine Koordinaten ergeben sich durch Auflösung der obigen Gleichungen zu

$$1)\qquad x = \frac{b_2 - b_1}{A_1 - A_2}, \quad y = \frac{A_1 b_2 - A_2 b_1}{A_1 - A_2}.$$

Hierbei verdienen folgende Fälle besondere Erwähnung:

α. Ist $b_1 = b_2$, so ist $x = 0$, d. h. der Durchschnittspunkt liegt in der Ordinatenachse. In der Tat bezeichneten aber auch die beständigen Größen b_1 und b_2 die Lage der in der y-Achse gelegenen Punkte beider Geraden, so daß bei Übereinstimmung dieser Werte die beiden Linien durch denselben Punkt der genannten Achse gehen müssen.

β. Wenn $A_1 b_2 = A_2 b_1$, so ist $y = 0$, d. h. der gemeinschaftliche Punkt liegt in der Abscissenachse. Wir übersehen sofort die Richtigkeit dieses Resultates, wenn wir die gewonnene Bedingungsgleichung in die Form $-\frac{b_1}{A_1} = -\frac{b_2}{A_2}$ bringen, worin nach Nr. 4) des vorigen Paragraphen die gleichen Größen die Abscissen der in der x-Achse gelegenen Punkte bezeichnen.

γ. Für $A_1 = A_2$ erhalten beide Koordinaten unendliche Werte, d. h. der Durchschnittspunkt liegt in unendlicher Entfernung. Wegen Übereinstimmung der Richtungskonstanten ist dies der Fall des Parallelismus beider Geraden.

δ. Wenn irgend zwei von den drei vorhin genannten Beziehungen gleichzeitig stattfinden, so ist $A_1 = A_2$ und auch $b_1 = b_2$, und man erhält für beide Koordinaten die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$. Dann sind aber auch die Gleichungen beider Geraden identisch, weshalb letztere in allen Punkten zusammenfallen müssen.

Sind die Gleichungen der beiden Linien in der Form

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1,$$

$$\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1$$

gegeben, so findet man als Koordinaten des Schnittpunktes:

$$2)\qquad x = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{a_2 b_1 - a_1 b_2}, \quad y = \frac{b_1 b_2 (a_1 - a_2)}{b_2 a_1 - b_1 a_2}.$$

Dasselbe Resultat kann auch aus den Gleichungen 11) des vorigen Paragraphen abgeleitet werden, sobald man die Gleichung einer Geraden auf die Form

$$\alpha x + \beta y = 1$$

bringt, worin α und β die reziproken Werte von a und b darstellen. Die in § 5 Nr. 11) gelöste Aufgabe kommt dann darauf hinaus, Werte von α und β zu finden, welche den Gleichungen

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = 1,$$
$$\alpha x_2 + \beta y_2 = 1$$

genügen, während jetzt der Wert von x und y aus dem Gleichungssysteme

$$\alpha_1 x + \beta_1 y = 1,$$
$$\alpha_2 x + \beta_2 y = 1$$

abgeleitet werden soll. Da die letzteren beiden Gleichungen aus den beiden vorhergehenden durch einfache Vertauschung der Buchstaben α und x, sowie β und y hervorgehen, so kann durch eine gleiche Vertauschung das Resultat der einen Aufgabe aus dem der andern abgeleitet werden. Gibt man zu diesem Zwecke den Gleichungen 11) des vorhergehenden Paragraphen die Form

$$\alpha = \frac{y_1 - y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2}, \quad \beta = \frac{x_1 - x_2}{y_2 x_1 - y_1 x_2},$$

so erhält man hieraus in der angegebenen Weise als Resultat der jetzigen Aufgabe:

$$x = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2}, \quad y = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_2 \alpha_1 - \beta_1 \alpha_2}.$$

Durch Ersetzung von $\alpha_1 = \frac{1}{a_1}$, $\beta_1 = \frac{1}{b_1}$ u. s. f. gelangt man hiervon zu den Gleichungen 2). — Bemerkenswert ist die letztere Ableitung insofern, als sie ein einfaches Mittel an die Hand gibt die auf den Durchschnitt von geraden Linien bezüglichen Aufgaben auf die Lage von Punkten in einer geraden Linie zurückzuführen. Aus der in Nr. 10) des § 5 enthaltenen Bedingung für die Lage dreier Punkte in einer geraden Linie erhält man z. B. durch die im vorigen enthaltene Methode als Bedingungsgleichung dafür, daß drei Gerade durch denselben Punkt hindurchgehen:

$$\beta(\alpha_1 - \alpha_2) + \beta_1(\alpha_2 - \alpha) + \beta_2(\alpha - \alpha_1) = 0,$$

oder in Determinantenform

$$3) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & 1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 .$$

II. Soll der Winkel δ gefunden werden, den zwei gegebene Gerade einschließen, so verschiebe man beide Linien parallel zu sich selbst in einen und denselben Punkt der x-Achse, wodurch ihre gegenseitige Lage nicht geändert wird. Sind dann α_1 und α_2 die im früher festgestellten Sinne gemessenen Winkel, welche beide Gerade mit der x-Achse einschließen, so erhält man in jedem Falle:

$$\tan \delta = \pm \tan (\alpha_1 - \alpha_2) .$$

Um in dieser Gleichung die Richtungskonstanten A_1 und A_2 der beiden Geraden einzuführen, beschränken wir uns zunächst auf rechtwinklige Koordinaten, weil bei deren Anwendung die einfachsten Beziehungen zwischen den Konstanten A_1 und A_2 und den Winkeln α_1 und α_2 stattfinden. Dann ist $\tan \alpha_1 = A_2$ und $\tan \alpha_2 = A_2$, und es folgt hieraus:

$$4) \qquad \tan \delta = \pm \frac{A_1 - A_2}{1 + A_1 A_2} .$$

Der Doppelwert von $\tan \delta$ kann hier als einem spitzen und einem stumpfen Winkel zugehörig betrachtet werden, und gibt somit die von den beiden Geraden gebildeten Nebenwinkel. Wird einzig der spitze Winkel verlangt, so ist dasjenige Vorzeichen zu wählen, durch welches $\tan \delta$ einen positiven Wert erhält. — Folgende zwei Fälle verdienen besondere Beachtung:

α. Ist $A_1 = A_2$, so wird $\tan \delta = 0$, also $\delta = 0$ oder $\delta = 180^0$, wodurch wir auf die schon oben besprochene Bedingung des Parallelismus zweier Geraden zurückgeführt werden.

β. Wenn $1 + A_1 A_2 = 0$, wobei nicht gleichzeitig $A_1 = A_2$ sein kann, so wird $\tan \delta = \infty$, also $\delta = 90^0$; die beiden Linien durchschneiden sich daher rechtwinklig. Man findet dann:

$$5) \qquad A_1 = -\frac{1}{A_2}, \quad A_2 = -\frac{1}{A_1} ,$$

d. h. zwei Gerade stehen senkrecht aufeinander, wenn bei Anwendung von rechtwinkligen Parallelkoordinaten ihren Richtungskonstanten reziproke Werte mit entgegengesetzten Vorzeichen zukommen

oder das Produkt der beiden Richtungskonstanten der negativen Einheit gleich ist.

Setzen wir, sobald die Gleichungen der beiden Geraden in der Form $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1$ und $\frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_2} = 1$ gegeben sind, nach § 5 Nr. 1) $A_1 = -\frac{b_1}{a_1}$ und $A_2 = -\frac{b_2}{a_2}$, so geht die Bedingungsgleichung für den rechtwinkligen Durchschnitt in $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$ über.

III. Es soll die Gleichung einer Geraden gefunden werden, die durch einen Punkt $x_1 y_1$ geht und eine gegebene Gerade $y = Ax + b$ *) rechtwinklig durchschneidet.

Da die Gerade durch den Punkt $x_1 y_1$ gehen soll, so muß ihre Gleichung die Form von Nr. 7) des vorigen Paragraphen besitzen. Nach der zweiten gegebenen Bedingung erhält die Richtungskonstante den Wert $-\frac{1}{A}$; die gesuchte Gleichung ist daher:

6) $$y - y_1 = -\frac{1}{A}(x - x_1).$$

Wenn insbesondere die gegebene Gerade durch den Koordinatenanfang geht und den Winkel α mit der x-Achse bildet, der gegebene Punkt aber in einem Abstande d vom Koordinatenanfange auf der Geraden selbst liegt, so ist $A = \tan\alpha$, und da d und α die Polarkoordinaten des gegebenen Punktes darstellen, $x_1 = d\cos\alpha$, $y_1 = d\sin\alpha$; man erhält also:

$$y - d\sin\alpha = -\frac{1}{\tan\alpha}(x - d\cos\alpha),$$

oder nach Multiplikation mit $\sin\alpha$ und einigen Umformungen:

7) $$\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - d = 0.$$ **)

Wir haben hiermit eine neue Form der Gleichung der Geraden gefunden: die Gerade ist dabei durch ihren Abstand vom Ursprunge, der immer positiv zu rechnen ist, und durch den

*) Wir bedienen uns von hier an der Abkürzung, eine Linie mit ihrer Gleichung zu benennen.

**) Wird der mit der y-Achse gebildete Winkel $90^\circ - \alpha$ mit β bezeichnet, so geht die Gleichung in

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y = d$$

über. Die Richtigkeit hiervon ist leicht auch für schiefwinklige Koordinaten zu bestätigen.

Winkel charakterisiert, den das vom Ursprunge auf die Gerade gefällte Lot mit der positiven Hälfte der Abscissenachse einschließt.

Ist die Gerade insbesondere parallel zu OY und schneidet sie die negative Hälfte der Abscissenachse, so ist $\alpha = 180^0$, und die Gerade hat die Gleichung

$$-x - d = 0, \text{ d. i. } x = -d;$$

ist die Gerade parallel zur Abscissenachse und schneidet sie die negative Hälfte der Ordinatenachse, so ist $\alpha = 270^0$, und daher die Gleichung

$$-y - d = 0, \text{ d. i. } y = -d.$$

Wegen ihrer großen Verwendbarkeit bezeichnet man die Gleichung 7) als die Normalform der Gleichung der Geraden. Ihr Zusammenhang mit der Gleichungsform

$$8) \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

ergibt sich leicht aus der Figur. Ist $ON = d$ (Fig. 13) normal auf T, so ist

$$OA = a = \frac{d}{\cos\alpha}, \quad OB = b = \frac{d}{\sin\alpha}.$$

Setzt man dies in 8) und multipliziert dann mit d, so geht 8) in 7) über.

Aus

$$\cos\alpha = \frac{d}{a}, \quad \sin\alpha = \frac{d}{b}$$

erhält man, indem man quadriert und addiert,

$$d^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = 1,$$

also ist

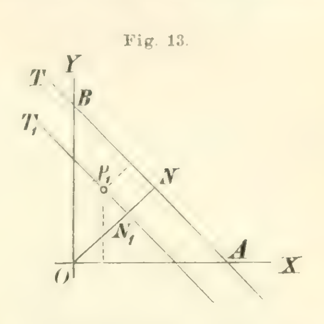
$$9) \quad \begin{cases} d = \sqrt{\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}}, \\ \cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}. \end{cases}$$

Liegt der Winkel α im 1., 2., 3., 4. Quadranten, so ist die zwischen den Koordinatenachsen enthaltene Strecke der Geraden in XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX'$ enthalten; hieraus geht hervor, daß $\cos\alpha$ mit b, $\sin\alpha$ mit a in Bezug auf das Vorzeichen übereinstimmt. In den Formeln 9) sind daher die Quadratwurzeln positiv zu nehmen.

IV. Die Entfernung eines Punktes $x_1 y_1$ von der Geraden $\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - d = 0$ soll berechnet werden.

Legt man durch den Punkt $x_1 y_1$ eine Parallele T_1 zu der gegebenen Geraden T, so ist der Winkel, den das Lot ON_1 dieser Parallelen mit OX einschließt, entweder α oder $\alpha + 180^0$, je nachdem O außerhalb oder innerhalb des zwischen den beiden parallelen Geraden enthaltenen Teiles der Ebene liegt. Ist d_1 der Abstand des Ursprungs von T_1, und p_1 der gesuchte Abstand des Punktes P_1 von der Geraden T, so ist im ersten Falle $p_1 = d - d_1$, im andern $p_1 = d + d_1$; nach diesen Formeln ergibt sich p_1 positiv oder negativ, je nachdem P_1 mit dem Ursprunge auf derselben Seite von S liegt oder nicht.

Fig. 13.



Im ersten Falle bildet d_1 mit der x-Achse den Winkel α; daher ist die Gleichung der Geraden T_1

$$\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - d_1 = 0,$$

im andern Falle ist der bezeichnete Winkel von α um 180^0 verschieden und daher die Gleichung von T_1

$$-\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y - d_1 = 0.$$

Da P_1 auf T_1 enthalten ist, so wird der Gleichung von $x_1 y_1$ genügt; folglich ist

$$d_1 = \cos\alpha \cdot x_1 + \sin\alpha \cdot y_1, \quad \text{bez.} = -\cos\alpha \cdot x_1 - \sin\alpha \cdot y_1.$$

Hieraus ergibt sich gleichmäßig für beide Fälle

10) $$p_1 = -(\cos\alpha \cdot x_1 + \sin\alpha \cdot y_1 - d).$$

Der Wert, den die linke Seite der Normalgleichung einer Geraden für die Koordinaten irgend eines Punktes der Ebene annimmt, ist dem Abstande des Punktes von der Geraden entgegengesetzt gleich.

Ist die Gleichung von T in der Form gegeben

$$y = Ax + b,$$

so bemerken wir, daß der Winkel, den die Gerade mit der Abscissen-

achse einschließt, und dessen Tangente die Richtungskonstante A ist, sich um 90^0 von α unterscheidet. Daher ist

$$\tan(\alpha \pm 90^0) = A,$$

woraus folgt

$$\cot\alpha = -A, \quad \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+A^2}}, \quad \cos\alpha = \mp\frac{A}{\sqrt{1+A^2}},$$

$$d = b\sin\alpha = \pm\frac{b}{\sqrt{1+A^2}}.$$

Setzt man diese Werte in p_1 ein, so erhält man

$$11) \qquad p_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{1+A^2}}(y_1 - Ax_1 - b).$$

Hieran schließen sich noch folgende Betrachtungen.

Die lineare Funktion $\cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - d$, die wir zur Abkürzung mit dem Buchstaben T bezeichnen wollen, hat für jeden Punkt der Ebene einen eindeutig bestimmten Wert. Sie verschwindet für alle Punkte einer durch die Größen d und α bestimmten Geraden, die durch die Gleichung $T = 0$ analytisch definiert ist. Für jeden nicht auf dieser Geraden enthaltenen Punkt P nimmt sie einen von Null verschiedenen positiven oder negativen Wert an.

Ändert P seine Lage auf der Ebene stetig, indem P von einer Ausgangslage Q bis zu einer Endlage R sich z. B. entlang einer geraden Linie bewegt, so ändert sich auch die Funktion T stetig. Soll daher T für die Koordinaten von Q und R Werte von verschiedenen Vorzeichen haben, so muß für einen Punkt der Strecke QR die Funktion T verschwinden, d. h. die Strecke QR muß die Gerade $T = 0$ durchschneiden.

Alle Punkte, die mit Q (oder mit R) auf derselben Seite von $T = 0$ liegen, können mit Q (bez. mit R) durch Linien verbunden werden, die $T = 0$ nicht schneiden, daher folgt, daß die Funktion T für alle Punkte, die auf derselben Seite von $T = 0$ liegen, dasselbe Vorzeichen hat, für Punkte auf verschiedenen Seiten dagegen ungleiche Vorzeichen, und umgekehrt.

Hiermit stimmen die geometrische Bedeutung der Funktion T und die oben für p_1 gegebene Vorzeichenbestimmung überein.

Soll die Untersuchung über den von zwei Geraden eingeschlossenen Winkel auf schiefwinklige Koordinaten ausgedehnt

werden, so sind zunächst unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen die Winkel α_1 und α_2 durch die Richtungskonstanten A_1 und A_2 auszudrücken. Nach der in Nr. 2) des § 5 gefundenen Formel ist, sobald der Koordinatenwinkel mit ω bezeichnet wird, mit Rücksicht auf die Bedeutung des dort angewendeten Winkels β die Konstante $A = \frac{\sin\alpha}{\sin(\omega - \alpha)}$ zu setzen. Wird hierin der Nenner entwickelt und Zähler und Nenner durch $\cos\alpha$ dividiert, so entsteht:

$$A = \frac{\tan\alpha}{\sin\omega - \tan\alpha\cos\omega},$$

woraus man leicht zu dem Resultat gelangt:

$$12) \qquad \tan\alpha = \frac{A\sin\omega}{1 + A\cos\omega}.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung $\tan\delta = \pm\tan(\alpha_1 - \alpha_2)$, sowie von Nr. 12) folgt nun:

$$\tan\delta = \pm\frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2},$$

$$\tan\alpha_1 = \frac{A_1\sin\omega}{1 + A_1\cos\omega}, \quad \tan\alpha_2 = \frac{A_2\sin\omega}{1 + A_2\cos\omega}.$$

Durch Einsetzung der beiden letzten Werte in die erste dieser Gleichungen entsteht:

$$13) \qquad \tan\delta = \pm\frac{(A_1 - A_2)\sin\omega}{1 + (A_1 + A_2)\cos\omega + A_1 A_2}.$$

Wird hierin der Zähler $= 0$ gesetzt, so erhält man für den Fall des Parallelismus wieder die schon früher als allgemein gültig erkannte Formel: $A_1 = A_2$. Sollen dagegen die Geraden senkrecht aufeinander stehen, so erwächst für diesen Fall die Bedingungsgleichung:

$$14) \qquad 1 + (A_1 + A_2)\cos\omega + A_1 A_2 = 0.$$

Mit Einführung dieses Resultates können die im vorhergehenden unter III. und IV. gestellten Aufgaben für schiefwinklige Koordinaten gelöst werden. Wir unterlassen diese etwas umständlicheren Rechnungen, da das Vorhergehende hinreichen wird, die Überzeugung zu gewähren, daß für derartige Aufgaben die Anwendung rechtwinkliger Koordinaten zu größerer Einfachheit führt.

§ 7. Die allgemeine Gleichung des ersten Grades.

Die in den vorhergehenden Paragraphen angewendeten Gleichungsformen der geraden Linie besitzen sämtlich das gemeinschaftliche Merkmal, daß sie in Beziehung auf die veränderlichen Parallelkoordinaten dem ersten Grade angehören. Es würde zur Bestätigung dieser Bemerkung vollkommen ausreichen, wenn sie sich für irgend eine Lage der Geraden gegen das Koordinatensystem als richtig erwiese. Von den für einen solchen besonderen Fall gefundenen Relationen, z. B. den für die Achsen selbst geltenden $x = 0$ und $y = 0$, gelangen wir nämlich zu den auf jede andere Lage bezüglichen Gleichungen mittels der in § 4 aufgestellten Änderungsformeln. Da nun letztere selbst ersten Grades sind, so kann, wenn man sie mit der Gleichung der Geraden in Verbindung bringt, nach einem bekannten Satze der Algebra hierdurch der Grad dieser Gleichung nicht abgeändert werden*). Im vorliegenden Falle ist es übrigens nicht nötig, erst diese allgemeine Bemerkung heranzuziehen, da die für die gerade Linie aufgestellten Gleichungen sich bereits als allgemein gültig erwiesen haben. — Es erübrigt noch die wichtige Frage, ob die Wechselbeziehung zwischen den Eigenschaften einer geraden Linie und einer Gleichung ersten Grades für die Veränderlichen x und y eine so innige ist, daß, so oft sich eine Gleichung dieser Art vorfindet, dieselbe als einer geraden Linie angehörend betrachtet werden kann. Untersuchen wir zu diesem Zwecke die allgemeinste Form einer Gleichung ersten Grades zwischen zwei veränderlichen Größen.

Jede Gleichung ersten Grades zwischen x und y kann, wenn man die mit gleichen Faktoren versehenen Glieder in eines zusammenfaßt, auf die Form

1) $$Ax + By + C = 0$$

*) Es leuchtet sofort ein, daß durch Anwendung der dem ersten Grade angehörenden Änderungsformeln der Grad einer algebraischen Gleichung nicht erhöht werden kann; eine Erniedrigung in der Art, daß etwa alle Glieder höheren Grades in Wegfall kämen, ist aber deshalb nicht möglich, weil dann bei der Rückkehr zum ursprünglichen Systeme eine Erhöhung eintreten müßte.

gebracht werden, worin A,*) B und C beliebige zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gelegene beständige Koeffizienten ausdrücken, von denen nur A und B nicht gleichzeitig verschwinden dürfen. Betrachten wir jetzt drei Punkte xy, x_1y_1, x_2y_2, deren Koordinaten sämtlich dieser Gleichung Genüge leisten sollen, so gelten für dieselben folgende Bedingungen:

$$Ax + By + C = 0,$$
$$Ax_1 + By_1 + C = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0,$$

aus denen, wenn man die erste mit $x_1 - x_2$, die zweite mit $x_2 - x$, die dritte mit $x - x_1$ multipliziert, und die drei hierdurch erhaltenen Gleichungen addiert, das Resultat

$$B\{y(x_1 - x_2) + y_1(x_2 - x) + y_2(x - x_1)\} = 0,$$

oder bei geänderter Anordnung der Glieder:

$$2) \qquad B\{x(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1)\} = 0$$

hervorgeht. In gleicher Weise erhält man durch Multiplikation der ersten Gleichung mit $y_2 - y_1$, der zweiten mit $y - y_2$, der dritten mit $y_1 - y$, und nachfolgende Addition:

$$3) \qquad A\{x(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1)\} = 0.$$

Da nun wenigstens eine der Größen A und B von 0 verschieden sein muß, so kann dem Zusammenbestehen der Gleichungen 2) und 3) nur genügt werden, wenn

$$x(y_1 - y_2) + x_1(y_2 - y) + x_2(y - y_1) = 0$$

ist, d. h. nach der geometrischen Bedeutung von Nr. 7) im § 3, wenn die drei Punkte in einer geraden Linie liegen. Da dies für je drei Punkte gilt, deren Koordinaten der Gleichung 1) Genüge leisten, so gehört diese selbst einer geraden Linie an.

Wenn die Lage aller Punkte einer Linie durch eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades zwischen den veränderlichen Parallelkoordinaten bestimmt ist, so wird diese Linie selbst eine Linie

*) Es bedarf wohl kaum der Erinnerung, daß diese Konstante A im allgemeinen nicht mit der Richtungskonstante der geraden Linie verwechselt werden darf. Ausgenommen ist der einzige Fall, wenn $B = -1$ und $C = b$, in welchem die obige Gleichung 1) mit Nr. 3) im § 5 identisch wird.

n^{ter} Ordnung genannt*). Die Gerade ist nach dem Vorhergehenden die einzige Linie erster Ordnung**).

Die in Nr. 1) aufgestellte allgemeinste Gleichungsform aller Linien erster Ordnung, d. h. aller Geraden, läßt sich, wenn man beiderseits durch eine der drei beständigen Größen A, B, C (die aber von 0 verschieden sein muß) dividiert, immer so umgestalten, daß sie nur noch zwei Konstanten, d. i. zwei der zwischen A, B und C bestehenden Verhältnisse, in sich enthält. Diese beiden Verhältnisse müssen entweder unmittelbar gegeben sein, wenn sich die Gleichung auf eine bestimmte Gerade beziehen soll, oder es sind dieselben aus zwei voneinander unabhängigen Bedingungen zu berechnen. So führt die analytische Untersuchung darauf zurück, daß eine Gerade unter anderem durch ihre Richtung und einen Punkt, durch zwei ihrer Punkte u. s. f. vollständig bestimmt ist. — Soll demnach an einer gegebenen Gleichung ersten Grades die Untersuchung geführt werden, ob sie für ein bestimmtes Parallelkoordinatensystem zu einer gegebenen Geraden gehört oder nicht, so muß es nach dem Vorhergehenden ausreichen, zu diesem Zwecke an zwei Punkten der Linie die Probe zu machen. Es folgt hieraus, daß eine Gleichung ersten Grades zwischen den Veränderlichen x und y den Koordinaten aller Punkte einer geraden Linie Genüge leistet, sobald dies bei zweien dieser Punkte geschieht. Wäre z. B., um an einen bereits behandelten Fall anzuknüpfen, die Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

nicht bereits als die einer Geraden bekannt, welche auf der x- und y-Achse die Strecken a und b abschneidet, so würde dies ohne weiteres daraus folgen, daß sie als Gleichung ersten Grades den Durchschnittspunkten der vorher erwähnten Linien mit den beiden Koordinatenachsen entspricht.

*) Die Berechtigung, eine Linie nach dem Grade ihrer Gleichung zu benennen, erwächst daraus, daß nach der im Eingange dieses Paragraphen gemachten Bemerkung der Grad der für eine besondere Lage des Koordinatensystems gefundenen Gleichung auch bei Änderung dieser Lage gewahrt bleibt und der Linie selbst als ein beständiges Merkmal anhaftet.

**) Mit Beziehung hierauf hat eine Gleichung ersten Grades zwischen veränderlichen Zahlen den Namen lineare Gleichung erhalten.

Wir werden nun einige besonders wichtige Lagenbeziehungen zwischen Geraden aus den Beziehungen allgemeiner Gleichungen ersten Grades kennen lernen.

I. Wenn die Gleichungen

1) $$Ax + By + C = 0,$$

2) $$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

einen geometrischen Sinn haben sollen, so dürfen weder A und B, noch auch A_1 und B_1 zugleich Null sein. Unter der Voraussetzung $A \gtrless 0$ multiplizieren wir die zweite Gleichung mit $A : A_1$, wodurch ihre geometrische Bedeutung nicht geändert wird: wir erhalten eine Gleichung von der Form

3) $$Ax + B_2 y + C_2 = 0.$$

Die Geraden 1) und 3) sind parallel, wenn ihre Richtungskonstanten gleich sind, d. i. wenn

$$A : B = A : B_2,$$

also wenn $B_1 = B$.

Multiplizieren wir ferner unter der Voraussetzung $B \gtrless 0$ die Gleichung 2) mit $B : A_1$, so ergibt sich die Form

4) $$Bx + B_3 y + C_3 = 0.$$

Sollen 1) und 4) sich unter rechten Winkeln schneiden, so muß das Produkt der Richtungskonstanten -1 sein, d. i.

$$\frac{B}{B_3} \cdot \frac{A}{B} = -1,$$

woraus folgt

$$B_3 = -A.$$

Daher hat man den sehr verwendbaren Satz: Die Parallelen bez. die Lote der Geraden

$$Ax + By + C = 0$$

haben Gleichungen der Form

$$Ax + By + C_2 = 0,$$

bez.

$$Bx - Ay + C_3 = 0,$$

wobei C_2 und C_3 ganz beliebige Zahlen sind.

II. Wenn man die linearen Funktionen

$$A_1 x + B_1 y + C_1 \quad \text{und} \quad A_2 x + B_2 y + C_2$$

der Reihe nach mit beliebigen Zahlen m_1 und m_2 multipliziert und addiert, so erhält man eine neue lineare Funktion: setzt man diese gleich Null, so hat man die Gleichung einer Geraden, die zu den Geraden

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ und } A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

in einem sehr einfachen Zusammenhange steht. Bezeichnen wir der besseren Übersicht wegen die gegebenen Funktionen mit den Buchstaben T_1 und T_2, sodaß also, unter Anwendung des Identitätszeichens $\equiv$,

$$5) \qquad \begin{aligned} T_1 &\equiv A_1 x + B_1 y + C_1, \\ T_2 &\equiv A_2 x + B_2 y + C_2, \end{aligned}$$

und die aus beiden zusammengesetzte Funktion mit T, sodaß

$$6) \qquad T \equiv m_1 T_1 + m_2 T_2,$$

so handelt es sich um die drei Geraden

$$7) \qquad T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T \equiv m_1 T_1 + m_2 T_2 = 0.$$

Für die Koordinaten des Schnittpunkts der ersten beiden Geraden ist $T_1 = T_2 = 0$, mithin verschwindet für sie auch die Funktion $m_1 T_1 + m_2 T_2$; hieraus folgt: **Sind m_1 und m_2 ganz beliebige Zahlen, so enthält die Gerade**

$$T \equiv m_1 T_1 + m_2 T_2 = 0$$

den Schnittpunkt der Geraden $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$. Man sagt alsdann, daß die drei Geraden $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ und $T = 0$ ein **Strahlenbüschel** bilden und nennt den gemeinsamen Punkt den **Träger des Büschels**.

Die Funktionen T_1 und T_2 erhalten die Normalform, wenn man sie durch $\sqrt{A_1^2 + B_1^2}$ bez. $\sqrt{A_2^2 + B_2^2}$ dividiert; dividiert man T durch $m_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}$, so ergibt sich

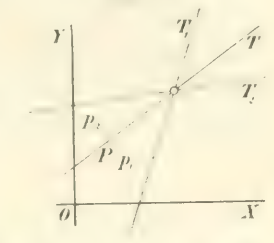
$$8) \qquad \frac{T_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} + \frac{m_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}{m_1 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \cdot \frac{T_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0.$$

Sind p_1 und p_2 die Abstände irgend eines Punktes P der Geraden $T = 0$ von $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$, so ist nach § 6, Nr. 10

$$p_1 = -\frac{T_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad p_2 = -\frac{T_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Wie Figur 14 lehrt, ist das Sinusverhältnis, in dem $T = 0$ den Winkel der Geraden $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ teilt, gleich dem Ver-

hältnisse $p_1 : p_2$, wobei das Sinusteilverhältnis positiv oder negativ zu nehmen ist, je nachdem P mit dem Nullpunkt in demselben Scheitelwinkelpaare liegt oder nicht. Aus 8) folgt nun: Die Gerade



$$T = m_1 T_1 + m_2 T_2 = 0$$

teilt den Winkel $T_1 T_2$ im Sinusverhältnisse

$$\frac{\sin T_1 T}{\sin T T_2} = -\frac{m_2 \sqrt{A_1^2 + B_1^2}}{m_1 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Sind insbesondere T_1 und T_2 Normalformen, und bezeichnet man $m_2 : m_1$ mit $-\lambda$, so hat man einfacher: Die Gerade

$$T = T_1 - \lambda T_2 = 0$$

teilt den Winkel $T_1 T_2$ im Sinusverhältnisse λ.

Nimmt man $\lambda = \pm 1$, so erhält man die Gleichungen der beiden Halbierenden der vier Winkel $T_1 T_2$, und hat daher: Die Gleichungen der Winkelhalbierenden der Geraden $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ sind, wenn T_1 und T_2 Normalform haben,

$$T_1 - T_2 = 0 \text{ und } T_1 + T_2 = 0.$$

III. Sind $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ drei Gerade, die keinen gemeinsamen Punkt haben, so ist

9) $$T = m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 = 0$$

im allgemeinen die Gleichung einer bestimmten Geraden, deren Lage von den Geraden $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$, und von den Verhältnissen $m_1 : m_2 : m_3$ abhängt. Eine Ausnahme tritt nur in dem besonderen Falle ein, wenn die Funktion T identisch verschwindet. Dann wird die Gleichung 9) von jedem Punkte erfüllt; setzt man nun insbesondere in 9) die Koordinaten des Schnittpunkts von $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$, so geht aus der Gleichung hervor

$$m_3 T_3 = 0;$$

folglich liegt der Schnittpunkt von $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ auch auf $T_3 = 0$. Dies ergibt: Gibt es zu den drei linearen Funktionen T_1, T_2, T_3 drei Zahlen m_1, m_2, m_3, so daß die Identität hergestellt wird

$$m_1 T_1 + m_2 T_2 + m_3 T_3 \equiv 0,$$

so haben die Geraden

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0$$

einen gemeinsamen Punkt.

Man überzeugt sich leicht mit Hilfe von II., daß auch die Umkehrung gilt. Dies Kennzeichen dafür, daß drei Gerade einen Punkt gemeinsam haben, ist oft bequemer anzuwenden, als das auf Seite 33 gegebene, mit dem es in einem sehr leicht erkennbaren Zusammenhange steht.

§ 8. Aufgaben.

I. Es ist der Ort der Punkte zu bestimmen, die von zwei gegebenen Punkten $P_1 P_2$ gleiche Abstände haben.

Ist P ein Punkt des gesuchten Ortes, so ist

$$PP_1^2 = PP_2^2,$$

also

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2.$$

Entwickelt man, so fallen die Quadrate der laufenden Koordinaten weg, und es verbleibt die lineare Gleichung

$$1) \quad 2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y - (x_2^2 - x_1^2) - (y_2^2 - y_1^2) = 0.$$

Der Ort ist daher eine Gerade. Setzt man

$$x = \tfrac{1}{2}(x_2 + x_1), \quad y = \tfrac{1}{2}(y_2 + y_1),$$

so wird die Gleichung 1) erfüllt; folglich enthält die Gerade den Mittelpunkt der Strecke $P_1 P_2$. Die Gleichung der Geraden $P_1 P_2$ ist bekanntlich

$$2) \quad (y_2 - y_1)x - (x_2 - x_1)y - (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0.$$

Die Richtungskonstanten von 1) und 2) sind

$$-\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1} \quad \text{und} \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Hieraus folgt (§ 6 Nr. 5), daß der verlangte Ort senkrecht zur Geraden $P_1 P_2$ ist. Somit ist 1) als die Gleichung des Mittellots der Strecke $P_1 P_2$ erkannt.

Die Gleichungen der Mittellote der Seiten des Dreiecks $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, $x_3 y_3$ sind

$$2(x_2 - x_1)x + 2(y_2 - y_1)y - x_2^2 + x_1^2 - y_2^2 + y_1^2 = 0,$$
$$2(x_3 - x_2)x + 2(y_3 - y_2)y - x_3^2 + x_2^2 - y_3^2 + y_2^2 = 0,$$
$$2(x_1 - x_3)x + 2(y_1 - y_3)y - x_1^2 + x_3^2 - y_1^2 + y_3^2 = 0.$$

Die Summe der linken Seiten verschwindet identisch; man hat

damit analytisch den Satz gefunden, daß die Mittellote der Seiten eines Dreiecks einen gemeinsamen Punkt haben.

II. Durch die drei Eckpunkte eines Dreiecks ABC (Fig. 15) sind drei in einem Punkte O sich schneidende Gerade AD, BE, CF gezogen. Es soll untersucht werden, in welchem Verhältnisse hierbei eine der drei Dreiecksseiten geteilt wird, wenn die Teilungsverhältnisse der beiden andern Seiten bekannt sind.

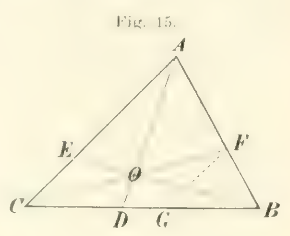


Fig. 15.

Wir wählen CB als x-Achse und CA als y-Achse eines Parallelkoordinatensystems mit dem Anfangspunkte C und gebrauchen die Bezeichnungen: $CB = a$, $CA = b$, $CD = a_1$, $CE = b_1$. Die Geraden AD und BE haben dann die Gleichungen:

$$\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b_1} = 1.$$

Wird die zweite von der ersten subtrahiert, so entsteht:

$$\frac{(a - a_1)\,x}{a a_1} - \frac{(b - b_1)\,y}{b b_1} = 0.$$

Es ist dies die Gleichung einer Geraden, die mit AD und und BE den Durchschnittspunkt O gemein hat und die, weil in ihr x und y gleichzeitig Null werden, durch den Koordinatenanfang geht, oder mit anderen Worten: es ist die Gleichung von CF.

Bezeichnet man das Teilverhältnis $AF:FB$ mit λ und beachtet, daß A die Koordinaten $0, b$, und B die Koordinaten $a, 0$ hat, so folgt für die Koordinaten von F nach § 3, IV

$$x = \frac{\lambda a}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{b}{1 + \lambda}.$$

Setzt man dies in die Gleichung von CF ein, so muß sie erfüllt werden; man erhält

$$\frac{a - a_1}{a_1}\,\lambda - \frac{b - b_1}{b_1} = 0,$$

woraus für das verlangte Verhältnis λ oder $AF:FB$ folgt:

$$AF:FB = \frac{b - b_1}{b_1} : \frac{a - a_1}{a_1} = \frac{EA}{CE} : \frac{DB}{CD}.$$

Sind z. B. CA und CB in den Punkten E und D halbiert, so wird auch $AF = FB$, was zu dem bekannten Satze führt, daß

die drei Mittellinien eines Dreiecks (die Geraden von den Eckpunkten nach den Mitten der Gegenseiten) sich in einem Punkte schneiden. — Bemerkenswert ist noch folgende Form, auf welche die obige Proportion gebracht werden kann:

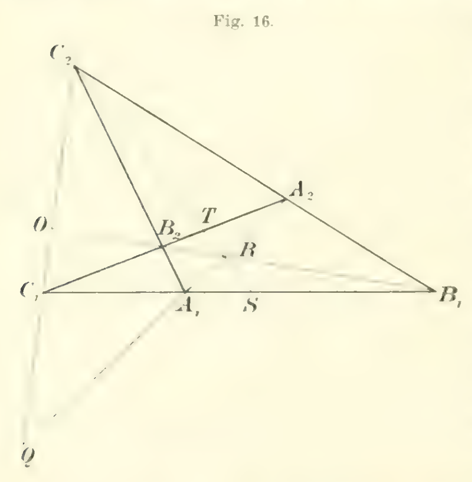
$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1.$$

Sie enthält den planimetrischen Lehrsatz: Werden durch die Eckpunkte eines Dreiecks drei in einem Punkte sich schneidende Transversalen gezogen, so teilen sie die Seiten des Dreiecks in drei Verhältnissen, deren Produkt die Einheit ist.

Man beachte, daß entweder alle Seiten innen geteilt werden, oder zwei außen, die dritte innen, im Einklange damit, daß das Produkt der drei Verhältnisse positiv ist.

III. Das vollständige Vierseit. Hierunter versteht man die Figur, die von vier Geraden gebildet wird, die nicht zu dreien einen Punkt gemein haben; die Geraden heißen Seiten, ihre Schnittpunkte Ecken des Vierseits. Das Vierseit $A_1 B_1$, $B_1 A_2$, $A_2 B_2$, $B_2 A_1$ hat die sechs Ecken $A_1 A_2 B_1 B_2 C_1 C_2$, von denen A_1 und A_2, B_1 und B_2, C_1 und C_2 einander gegenüberliegen. Auf jeder Seite liegen drei Ecken, z. B. auf $A_1 B_1$ die Ecken A_1, B_1, C_1. Die Geraden zweier Gegenecken nennt man Diagonalen des vollständigen Vierseits; ihrer sind drei, $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$. Das von ihnen gebildete Dreieck OQR heißt das Diagonalendreieck.

Fig. 16.



Nimmt man $C_1 B_1$ und $C_1 A_2$ als Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems und setzt $C_1 A_1 = a_1$, $C_1 B_1 = a_2$, $C_1 B_2 = b_1$, $C_1 A_2 = b_2$, dann haben die Geraden $A_1 B_2$, $B_1 A_2$, $A_1 A_2$, $B_1 B_2$ der Reihe nach die Gleichungen

$$3)\quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} = 1, \qquad 5)\quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_2} = 1.$$

$$5)\quad \frac{x}{a_2} + \frac{y}{b_1} = 1, \qquad 6)\quad \frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_2} = 1.$$

Zählt man entweder 3) und 4), oder 5) und 6) zusammen und teilt durch 2, so erhält man beide Male

$$7)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right) y = 1.$$

Dies ist daher sowohl die Gleichung einer Geraden, die den Schnittpunkt von $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$, als auch den von $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ enthält, d. i. der Geraden RC_2. Die von RC_2 auf der x-Achse abgeschnittene Strecke $C_1 S = a$ findet man daher, wenn man in 7) $y = 0$ setzt; es ergibt sich

$$8)\qquad \frac{1}{a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right), \quad a = \frac{2 a_1 a_2}{a_1 + a_2}.$$

Hiernach ist $C_1 S$ das harmonische Mittel aus $C_1 A_1$ und $C_1 B_1$. Setzt man in 7) $x = 0$, $y = C_1 T = b$, so folgt

$$9)\qquad \frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2}\right), \quad b = \frac{2 b_1 b_2}{b_1 + b_2}.$$

Es ist also auch $C_1 T$ das harmonische Mittel aus $C_1 B_2$ und $C_1 A_2$.

Aus der Gleichung 8) folgt für die Strecken $A_1 S$ und SB_1:

$$A_1 S = a - a_1 = \frac{a_1 (a_2 - a_1)}{a_1 + a_2}, \quad SB_1 = a_2 - a = \frac{a_2 (a_2 - a_1)}{a_1 + a_2},$$

daher hat man

$$10)\qquad C_1 A_1 : C_1 B_1 = A_1 S : SB_1.$$

Dies Paar teilt also die Strecke $A_1 B_1$ außen und innen in gleichem Verhältnisse. Umgekehrt, wenn C_1 und S die Strecke $A_1 B_1$ außen und innen in demselben Verhältnisse teilen, so ist, wenn man die obigen Zeichen verwendet,

$$a_1 : a_2 = (a - a_1) : (a_2 - a),$$

und hieraus folgt für a der Wert 8), es ist also dann $C_1 S$ das harmonische Mittel aus $C_1 A_1$ und $C_1 B_1$. Aus 10) folgt durch Umstellung

$$C_1 A_1 : A_1 S = C_1 B_1 : SB_1.$$

Wenn also C_1 und S die Strecke $A_1 B_1$ **harmonisch teilen** (d. i. außen und innen in gleichem Verhältnisse), so wird auch $C_1 S$ von A_1 und B_1 harmonisch geteilt, es ist also auch $A_1 B_1$ das harmonische Mittel aus $C_1 B_1$ und SB_1. Aus diesem Grunde ist die Beziehung der Paare $A_1 B_1$ und $C_1 S$ wechselseitig, man nennt sie daher harmonisch zugeordnet oder kürzer harmonisch.

Sollen $A_1 B_1$ und $C_1 S$ harmonisch sein, so ist durch $A_1 B_1$ und C_1 der vierte Punkt S eindeutig bestimmt, da er $A_1 B_1$ in dem bestimmten Verhältnisse $C_1 A_1 : C_1 B_1$ innen teilt. Wählt man in Fig. 16 die Punkte $A_1 B_1$ und den äußeren Punkt C_1 der Strecke $A_1 B_1$ ganz beliebig, ferner ebenfalls beliebig C_2 und die Richtung von $C_1 B_2$, so ist die Figur vollständig bestimmt. Denn durch $C_2 A_1$ und $C_2 B_1$ ergeben sich B_2 und A_2; aus $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ folgt ferner R; daher muß $C_2 R$ durch den bereits bestimmt gedachten Punkt S gehen. $C_2 S$ kann daher auch ohne Verwendung von $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ unmittelbar durch Verbindung von C_2 mit S hergestellt werden; hieraus folgt T, und da nach 9) auch $B_1 B_2$ und $C_1 T$ harmonisch sind, so ergibt sich der Satz: Die harmonischen Paare $C_1 S$ und $A_1 B_1$ werden von jedem beliebigen Punkte C_2 aus auf jede durch C_1 gehende Gerade durch harmonische Paare abgebildet. Daß dieser Satz auch gilt, wenn man zur Abbildung eine beliebige, nicht durch C_1 gehende Gerade benutzt, erkennt man mit Hilfe des keiner weiteren Bemerkung bedürftigen Hilfssatzes: Harmonische Paare ergeben von jedem Punkte aus auf eine parallele Gerade ein harmonisches Bild. Man hat daher schließlich: Zwei harmonische Paare werden von jedem Punkte der Ebene auf jede beliebige Gerade **harmonisch abgebildet.**

Aus diesem Grunde bezeichnet man zwei Strahlenpaare eines Büschels, die zwei harmonische Paare abbilden, als harmonische Strahlenpaare. Daher gilt: Zwei harmonische Strahlenpaare erzeugen auf jeder Geraden harmonische Punktpaare. Hieraus folgt nun schließlich: In einem vollständigen **Vierseite sind die von einer Ecke ausgehenden Seiten** des Vierseits und des Diagonalendreiecks harmonisch; **ferner sind die auf einer Diagonale des Vierseits ent**haltenen beiden Gegenecken mit den auf ihr enthaltenen **Ecken des Diagonalendreiecks in Harmonie.**

IV. Harmonische Punkt- und Strahlenpaare. Die Eigenschaften des vollständigen Vierseits fordern dazu auf, die Harmonie von Punkt- und Strahlenpaaren durch die Koordinaten der Punkte, bez. die Gleichungen der Strahlen zum Ausdrucke zu bringen.

Für Punktpaare ist die Sache sehr einfach; haben A_1 und A_2 die Koordinaten $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, und sind OQ und $A_1 A_2$ in Harmonie,

so teilen O und Q die Strecke $A_1 A_2$ in *demselben* Verhältnisse; wird dies mit λ bezeichnet und haben O und Q die Koordinaten $x_3 y_3$, $x_4 y_4$, so ist daher

$$13)\qquad x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$x_4 = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y_4 = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}.$$

Im Hinblick auf diese Formeln bilde man aus den linearen Funktionen

$$T_1 = A_1 x + B_1 y + C_1, \; T_2 = A_2 x + B_2 y + C_2$$

die vier Gleichungen

$$14)\; T_1 = 0, \; T_2 = 0, \; T_3 \equiv T_1 + \lambda T_2 = 0, \; T_4 \equiv T_1 - \lambda T_2 = 0.$$

Diese Strahlen schneiden auf der x-Achse die Strecken ab

$$a_1 = -\frac{C_1}{A_1}, \; a_2 = -\frac{C_2}{A_2}, \; a_3 = -\frac{C_1 + \lambda C_2}{A_1 + \lambda A_2}, \; a_4 = -\frac{C_1 - \lambda C_2}{A_1 - \lambda A_2}.$$

Ersetzt man in den letzten beiden Formeln C_1 und C_2 durch $-A_1 a_1$ und $-A_2 a_2$, teilt Zähler und Nenner durch A_1, und setzt

$$\frac{A_2 \lambda}{A_1} = \mu,$$

so erhält man

$$a_3 = \frac{a_1 + \mu a_2}{1 + \mu}, \; a_4 = \frac{a_1 - \mu a_2}{1 - \mu}.$$

Daher sind die Spuren der Strahlen 14) zwei harmonische Paare; dies ergibt: Die Strahlenpaare

$$T_1 = 0, \; T_2 = 0, \; T_3 \equiv T_1 + \lambda T_2 = 0, \; T_4 \equiv T_1 - \lambda T_2 = 0$$

sind in Harmonie.

Sind T_1 und T_2 Normalformen, so teilen T_3 und T_4 die Winkel $T_1 T_2$ in demselben Sinusverhältnisse; daher folgt noch: Die zwei Geraden, die die Winkel der Geraden $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ in demselben Sinusverhältnisse teilen, sind in Harmonie. Man erkennt sofort, daß sich dieser Satz umkehren läßt.

Mit Hilfe des vollständigen Vierseits kann man durch das Ziehen von Geraden durch im Endlichen liegende Punkte, also ohne Benutzung des Zirkels, in sofort ersichtlicher Weise, zu einem Punktpaare $A_1 A_2$ und einem Punkte A_3 den zugehörigen vierten harmonischen Punkt, sowie zu einem Strahlenpaare $T_1 T_2$ und einem T_3 den vierten harmonischen Strahl zeichnen.

V. **Die Gleichungen der Geraden aufzustellen, welche die Winkel und Außenwinkel eines Dreiecks halbieren.**

Wir wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Ursprung im Innern des gegebenen Dreiecks gelegen ist. Die Gleichungen der Seiten in Normalform seien

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0.$$

Nach § 7, Nr. 12 sind die Gleichungen der Geraden, die die Winkel und Außenwinkel des Dreiecks halbieren,

$$\begin{aligned} T_1 - T_2 &= 0, & T_1 + T_2 &= 0, \\ T_2 - T_3 &= 0, & T_2 + T_3 &= 0, \\ T_3 - T_1 &= 0, & T_3 + T_1 &= 0. \end{aligned}$$

Die linken Seiten dieser sechs linearen Gleichungen erfüllen die Identitäten

$$\begin{aligned} (T_1 - T_2) + (T_2 - T_3) + (T_3 - T_1) &= 0; \\ (T_1 - T_2) + (T_2 + T_3) - (T_3 + T_1) &= 0; \\ (T_1 + T_2) - (T_2 - T_3) - (T_3 + T_1) &= 0; \\ (T_1 + T_2) - (T_2 + T_3) + (T_3 - T_1) &= 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt der aus der Planimetrie bekannte Satz, daß die drei Halbierenden der Winkel eines Dreiecks, sowie die Halbierende jedes Dreieckswinkels mit den Halbierenden der an den beiden andern Ecken liegenden Außenwinkel einen gemeinsamen Punkt haben.

VI. **Die Gleichungen der Höhen eines Dreiecks durch die Normalgleichungen der Seiten auszudrücken.**

Die auf der Seite $T_3 = 0$ stehende Höhe teilt den gegenüberliegenden Winkel α_3 in die Teile $90^0 - \alpha_2$ und $90^0 - \alpha_1$, also in dem Sinusverhältnisse

$$\frac{\sin(90^0 - \alpha_2)}{\sin(90^0 - \alpha_1)} = \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1},$$

wenn die $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ gegenüberliegenden Winkel mit α_1 und α_2 bezeichnet werden; die Gleichung dieser Höhe ist also

$$T_1 - \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} T_2 = 0,$$

wenn man den Nullpunkt im Innern des Dreiecks annimmt. Multipliziert man diese Gleichung mit $\cos \alpha_1$ und bezeichnet die linke Seite der entstandenen Gleichung mit H_3, so erhält man

15) $$H_3 = \cos \alpha_1 \cdot T_1 - \cos \alpha_2 \cdot T_2 = 0.$$

Ebenso ergeben sich als Gleichungen der anderen beiden Höhen

$$H_1 \equiv \cos \alpha_2 \cdot T_2 - \cos \alpha_3 \cdot T_3 = 0,$$

$$H_2 \equiv \cos \alpha_3 \cdot T_3 - \cos \alpha_1 \cdot T_1 = 0.$$

Aus ihnen erkennt man die Identität

$$H_3 + H_1 + H_2 \equiv 0,$$

und hat so den Satz, daß die drei Höhen einen gemeinsamen Punkt haben.

Drittes Kapitel.

Der Kreis.

§ 9. Gleichungsformen des Kreises für rechtwinklige und Polarkoordinaten.

An die Betrachtung der geraden Linie, deren Eigenschaften wir aus der Beständigkeit des Polwinkels in einem Polarkoordinatensysteme herleiteten, schließt sich am einfachsten die Untersuchung derjenigen Linie, in welcher die Polabstände konstant sind. Dies ist aber der Kreis, dessen einzelne Punkte von dem hierbei als Anfangspunkt des Koordinatensystems angesehenen Mittelpunkte eine unveränderliche Entfernung haben. Soll diese Fundamentaleigenschaft des Kreises zum besseren Anschlusse an die vorhergehenden Diskussionen auf Parallelkoordinaten bezogen werden, so gilt es, die Gleichung für den geometrischen Ort eines Punktes xy aufzustellen, dessen geradlinige Entfernung von dem durch seine Koordinaten a und b bestimmten Mittelpunkte eine konstante Größe (den Halbmesser k) besitzt. Wir beschränken uns hierbei vorläufig auf rechtwinklige Koordinaten, weil bei deren Anwendung die Entfernung zweier Punkte einen einfacheren Ausdruck gewinnt. Nach Nr. 1) im § 3 erhalten wir dann

1) $$(x-a)^2+(y-b)^2=k^2$$

als allgemeinste Gleichung des Kreises.

Besondere Formen dieser allgemeinen Gleichung werden dadurch gewonnen, daß man dem Koordinatensysteme eine bestimmte Lage gegen den Kreis einräumt. Folgende zwei Fälle verdienen hierbei besondere Beachtung.

A. Wird der Koordinatenanfang in den Mittelpunkt des Kreises verlegt, so ist $a=b=0$. Hierdurch entsteht das Resultat:

2) $$x^2+y^2=k^2.$$

Insofern diese einfachste Form der auf Parallelkoordinaten bezogenen Kreisgleichung in Beziehung auf jede der beiden ver-

änderlichen Koordinaten eine rein quadratische Form besitzt, gehören in ihr jedem x zwei absolut gleiche, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen behaftete y zu, und dasselbe findet bei den einem gegebenen y entsprechenden x statt, soweit sich überhaupt r e e l l e Resultate vorfinden. Man erhält nämlich aus Nr. 2):

$$y = \pm\sqrt{k^2 - x^2} \quad \text{und} \quad x = \pm\sqrt{k^2 - y^2},$$

was nur solange geometrisch mögliche Werte ergibt, als x und y zwischen den Grenzen $-k$ und $+k$ eingeschlossen sind. Aus den gleichen Doppelwerten der x und y folgt die S y m m e t r i e des Kreises gegen jeden der beiden zu Achsen gewählten Durchmesser, also auch g e g e n a l l e D u r c h m e s s e r, da immer eine der beiden Achsen in beliebiger Richtung durch den Mittelpunkt gelegt werden kann.

Schreiben wir die Gleichung 2) in der Form:

$$y^2 = (k+x)(k-x) \quad \text{oder} \quad (k-x) : y = y : (k+x),$$

so zeigt sich y als mittlere Proportionale zwischen $k-x$ und $k+x$, was auf einen bekannten planimetrischen Lehrsatz hinauskommt.

B. Nimmt man einen Punkt der Kreislinie zum Anfangspunkte und legt die positive Seite der x-Achse durch den Mittelpunkt, so ist $b = 0$ und $a = k$. Hieraus ergibt sich nach Reduktion auf y^2:

3) $$y^2 = 2kx - x^2.$$

Da diese Gleichung nur in Beziehung auf y rein quadratisch ist, so hat bei der jetzigen Gestaltung des Koordinatensystems der Kreis nur noch gegen die x-Achse eine symmetrische Lage.

Bringen wir Nr. 3) auf die Form

$$x^2 + y^2 = 2kx$$

und beachten, daß $\sqrt{x^2 + y^2}$ die Entfernung des beliebigen Kreispunktes xy vom Koordinatenanfange ausdrückt, die wir zur Abkürzung mit r bezeichnen wollen, so können wir auch schreiben:

$$x : r = r : 2k.$$

Es wird keine Schwierigkeit darbieten, dieses Resultat in der Form eines bekannten planimetrischen Lehrsatzes zu deuten.

Um zu allgemeinen Betrachtungen über den Kreis zu gelangen, kehren wir zunächst zu der in Nr. 1) aufgestellten allgemeinen

Gleichung zurück und geben ihr die Gestalt:

4) $$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - k^2 = 0 .$$

Führen wir Polarkoordinaten ein, indem wir setzen

$$x = r\cos\varphi , \quad y = r\sin\varphi ,$$

sind ferner c und γ die Polarkoordinaten der Kreismitte, sodaß

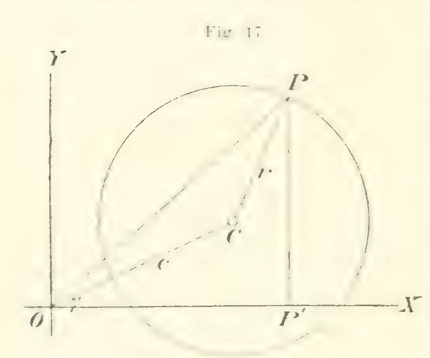
$$a = c\cos\gamma , \quad b = c\sin\gamma ,$$

so entsteht aus 4) nach einfacher Zusammenfassung die **Polargleichung des Kreises**

5) $$r^2 - 2c\cos(\varphi - \gamma)\cdot r + c^2 - k^2 = 0 ,$$

was sich auch unmittelbar aus dem Dreiecke POC (Fig. 17) unter Anwendung des Kosinussatzes ergibt. Denkt man sich in dieser Gleichung φ gegeben, dagegen r unbekannt, so liefert sie die Polabstände der Punkte, in denen eine durch den Nullpunkt unter dem Polwinkel φ gezogene Gerade den Kreis durchschneidet. Sind r_1 und r_2 die Wurzeln von 5), so ist nach einem bekannten Satze über Funktionen II. Grades

Fig. 17.



6) $$r_1 r_2 = c^2 - k^2 ;$$

das Produkt $r_1 r_2$ hängt also nicht von φ ab, sondern ist für alle durch den Nullpunkt gehenden Strahlen gleich. Da nun jeder Punkt der Ebene als Nullpunkt dienen kann, so folgt aus 6) der Satz: **Die Strahlen eines Büschels werden von einem Kreise so geschnitten, daß das Produkt der beiden Strecken, die auf demselben Strahle vom Träger bis an den Kreis reichen, unveränderlich ist.** Dieses beständige Produkt nennt man die **Potenz des Trägers für den Kreis.** Liegt der Träger O außerhalb des Kreises, so haben für jeden Strahl r_1 und r_2 dasselbe Zeichen, liegt O auf der Kreislinie, so ist eine der Strecken Null, wird O vom Kreise eingeschlossen, so haben r_1 und r_2 ungleiche Zeichen; daher hat O positive, verschwindende, oder negative Potenz, je nachdem es außerhalb, auf, oder innerhalb des Kreises liegt. Damit stimmt überein, daß alsdann c bez. größer, gleich, oder kleiner als k ist.

Bezeichnet man die Potenz des Nullpunktes zur Abkürzung mit P, so ist

7) $$P = c^2 - k^2 = a^2 + b^2 - k^2,$$

und die Gleichung des Kreises wird

a) für rechtwinklige Koordinaten

8) $$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + P = 0,$$

b) für Polarkoordinaten

9) $$r^2 - 2r\cos(\varphi - \gamma) + P = 0.$$

Aus 5) folgt ferner

10) $$r_1 + r_2 = 2c\cos(\varphi - \gamma).$$

Der Polwinkel φ kann so gewählt werden, daß zu ihm zwei gleiche Werte $r_1 = r_2$ gehören; der zugehörige besondere Nullstrahl hat mit dem Kreise zwei zusammenfallende Punkte gemein, d. i. er berührt ihn in einem Punkte. Nennt man den Berührungspunkt P' und seine Polarkoordinaten r' und φ', so ist nach 10) und 6)

11) $$r' = c\cos(\varphi' - \gamma),$$

12) $$r'^2 = c^2 - k^2.$$

Hieraus ergibt sich nur ein Wert für r', nämlich

13) $$r' = \sqrt{c^2 - k^2}.$$

Dagegen erhält man zwei Werte für φ', indem durch Einsetzung von 12) in 10) folgt

$$c^2\cos^2(\varphi' - \gamma) = c^2 - k^2,$$

14) $$c^2\sin^2(\varphi' - \gamma) = k^2,$$

$$\sin(\varphi' - \gamma) = \pm\frac{k}{c}.$$

Dies lehrt den aus den Anfängen der Planimetrie bekannten Satz: Die von einem Punkte bis an einen Kreis reichenden Tangenten sind einander gleich und bilden mit dem den Punkt enthaltenden Kreisdurchmesser nach beiden Seiten hin gleiche Winkel.

Ist $c < k$, so ist φ' unmöglich; für $c = k$ folgt aus 14) $\varphi' - \gamma = \pm 90^0$; auch diese Ergebnisse sind sehr leicht geometrisch zu deuten.

Die Projektion von r' auf die Gerade OC ist

$$r'\cos(\varphi' - \gamma) = c\cos^2(\varphi' - \gamma) = \frac{c^2 - k^2}{c}.$$

Dieser Wert hängt nicht von φ' ab, ist also für beide Berührungspunkte derselbe; die beiden von O ausgehenden Tangenten werden daher auf OC projiziert, wenn man OC mit der Berührungssehne, d. i. der Sehne zwischen den Berührungspunkten, durchschneidet, diese Berührungssehne ist ein Lot der Geraden OC und hat von O den Abstand

$$\frac{c^2-k^2}{c}.$$

Aus der Polargleichung des Kreises ergibt sich noch eine dritte wertvolle Schlußfolgerung.

Aus 6) und 10) ergibt sich durch Division

$$\frac{2\,r_1\,r_2}{r_1+r_2}=\frac{c^2-k^2}{c\cos(\varphi-\gamma)}.$$

Die linke Seite ist das harmonische Mittel aus r_1 und r_2; bezeichnet man dies mit ϱ, so hat man also

$$\varrho=\frac{c^2-k^2}{c\cos(\varphi-\gamma)}.$$

Hieraus folgt

15) $$\varrho\cos(\varphi-\gamma)=\frac{c^2-k^2}{c}.$$

Hiernach ist die Projektion von ϱ auf OC unabhängig von φ, also für alle Strahlen des Nullpunktes gleich.

Ist Π der Endpunkt von ϱ, so sind P_1P_2 und $O\Pi$ harmonische Paare; der Ort der Punkte Π ist daher das Lot zu OC, das von O den Abstand 15) hat. Da man nun jeden beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ der Ebene als Nullpunkt wählen kann, so folgt: Der Ort der Punkte, die auf den Strahlen eines Büschels den beiden Schnittpunkten eines Strahles mit dem Kreise und dem Träger $\mathfrak{P}$ harmonisch zugeordnet sind, ist eine Gerade, die senkrecht auf $\mathfrak{P}C$ steht und von $\mathfrak{P}C$ die Strecke

$$(\mathfrak{P}C^2-k^2):\mathfrak{P}C$$

abschneidet. Diese Gerade bezeichnet man als die Polare von $\mathfrak{P}$ für den Kreis. Liegt $\mathfrak{P}$ außerhalb des Kreises, so ist die Polare von $\mathfrak{P}$ die Berührungssehne.

Die Gleichung der Polaren kann man durch die Koordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ des Punktes $\mathfrak{P}$ und die Konstanten a, b, k der Kreisgleichung ausdrücken. Die Gerade $\mathfrak{P}C$ hat die Gleichung

$$(b-\mathfrak{y})\,x-(a-\mathfrak{x})\,y+\cdots=0\,.$$

Da die Polare hierauf senkrecht steht, so hat ihre Gleichung die Form

$$(a-\mathfrak{x})\,x+(b-\mathfrak{y})\,y-m=0\,,$$

worin m noch zu bestimmen ist.

Der Abstand dieser Geraden vom Punkte $\mathfrak{P}$ ist bekanntlich

16) $$\frac{(a-\mathfrak{x})\,\mathfrak{x}+(b-\mathfrak{y})\,\mathfrak{y}-m}{\sqrt{(a-\mathfrak{x})^2+(b-\mathfrak{y})^2}}\,.$$

Da

$$(a-\mathfrak{x})^2+(b-\mathfrak{y})^2=\mathfrak{P}C^2\,,$$

so kann man 16) ersetzen durch

$$\frac{\mathfrak{P}C^2+a\mathfrak{x}+b\mathfrak{y}-a^2-b^2+m}{\mathfrak{P}C}\,.$$

Dies soll

$$\frac{\mathfrak{P}C^2-k^2}{\mathfrak{P}C}$$

sein; daher ist

$$a\mathfrak{x}+b\mathfrak{y}-a^2-b^2+m=-k^2\,,$$

$$m=-a\mathfrak{x}-b\mathfrak{y}+a^2+b^2-k^2\,,$$

und daher die gesuchte Gleichung der Polaren von $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$

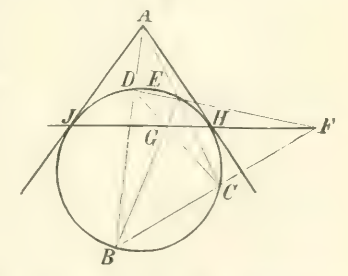
17) $$(a-\mathfrak{x})\,x+(b-\mathfrak{y})\,y-a\mathfrak{x}-b\mathfrak{y}+a^2+b^2-k^2=0\,.$$

Liegt die Mitte des Kreises im Nullpunkte, ist also $a=b=0$, so hat man einfacher

$$\mathfrak{x}x+\mathfrak{y}y-k^2=0\,.$$

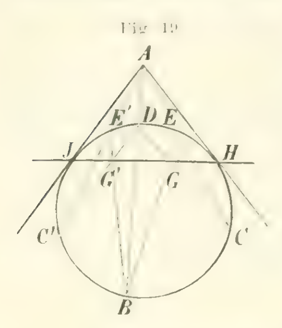
Mit Anwendung des Gesetzes von der harmonischen Teilung der Diagonalen eines vollständigen Vierseits (vgl. § 8 IV) erwächst hieraus die folgende Linealkonstruktion zur Lösung der Aufgabe, von einem außerhalb des Kreises gegebenen Punkte Tangenten an den Kreis zu legen (Fig. 18).

Fig. 18.



Man ziehe von dem gegebenen Punkte A aus die beliebigen Sekanten AB und AC, welche außer in B und C den Kreis in D und E schneiden. Die Geraden BC und DE, sowie BE und CD geben dann die Durchschnittspunkte F und G, deren gerade Verbindungslinie FG die Berührungssehne darstellt. AH und AJ sind hiernach die gesuchten Tangenten. Da jede dritte zu Hilfe genommene Sekante in Ver-

bindung mit einer der beiden vorher angewendeten zu derselben Berührungssehne führen muß, so läßt diese Konstruktion auch die in Fig. 19 enthaltene Abänderung zu. Hier sind durch A die drei Sekanten AB, AC und AC' gelegt und dann die Durchschnittspunkte dieser Geraden und des Kreises durch die Sehnen BE und CD, BE' und $C'D$ verbunden. Die hierdurch gewonnenen Schnittpunkte G und G' liegen wieder auf der Berührungssehne HJ.



Die in den Figuren 18 und 19 dargelegten Konstruktionen, sowie der Lehrsatz, aus welchem sie entspringen, sind noch dadurch bemerkenswert, daß sich später zeigen wird, daß sie nicht allein für den Kreis, sondern überhaupt für alle Linien zweiten Grades Anwendung finden.

In der Gleichung 4) treten drei voneinander unabhängige Konstante auf, a, b und k; ihre Bestimmung erfolgt durch drei Bedingungsgleichungen. Daher erkennt man, daß zur Bestimmung eines Kreises drei Bedingungen nötig sind.

Untersuchen wir den Fall, wenn der Kreis durch drei gegebene Punkte x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 hindurchgehen soll.

Zur Bestimmung der Konstanten sind bei dieser Aufgabe unter Festhaltung der Form 8) folgende drei Gleichungen vorhanden:

$$x_1^2 + y_1^2 - 2ax_1 - 2by_1 + P = 0,$$
$$x_2^2 + y_2^2 - 2ax_2 - 2by_2 + P = 0,$$
$$x_3^3 + y_3^3 - 2ax_3 - 2by_3 + P = 0.$$

Werden je zwei derselben voneinander subtrahiert, so entstehen die neuen Relationen:

$$18)\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2 - 2a(x_1 - x_2) - 2b(y_1 - y_2) = 0, \\ x_2^2 - x_3^3 + y_2^2 - y_3^2 - 2a(x_2 - x_3) - 2b(y_2 - y_3) = 0, \\ x_3^2 - x_1^2 + y_3^2 - y_1^2 - 2a(x_3 - x_1) - 2b(y_3 - y_1) = 0. \end{cases}$$

Hält man diese drei Gleichungen mit § 8 Nr. 1) zusammen, so erkennt man in ihnen die Gleichungen der Mittellote der Strecken

P_1P_2, P_2P_3 und P_3P_1, wobei darin die laufenden Koordinaten xy durch die des Kreismittelpunktes ersetzt sind. Die Gleichungen 18) sagen daher nichts anderes aus, als daß der Mittelpunkt des dem Dreiecke $P_1P_2P_3$ umschriebenen Kreises der gemeinsame Punkt der Mittellote der Seiten dieses Dreiecks ist.

Ein wesentliches Merkmal, welches den für den Kreis aufgestellten Gleichungsformen anhaftet, ist, daß sie sämtlich in Beziehung auf die laufenden Koordinaten dem zweiten Grade angehören. Die allgemeinste Gestalt einer Gleichung zweiten Grades zwischen den Veränderlichen x und y ist

$$19)\quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

worin $a_{11}a_{12}\cdots a_{33}$ beliebige zwischen $-\infty$ und $+\infty$ gelegene beständige Koeffizienten vertreten, von denen immer einer, der jedoch von Null verschieden sein muß, durch Division entfernt werden kann. Soll es nun möglich sein, diese Gleichung 19) auf die in Nr. 4) gefundene Form der allgemeinen Kreisgleichung zurückzuführen, so ist die Erfüllung folgender Bedingungen notwendig und ausreichend:

α. Die Koeffizienten der Quadrate von x und y müssen gleich, aber von Null verschieden sein, also: $a_{11} = a_{22} \gtrless 0$.

β. Es darf nicht das Produkt der beiden Größen von x und y vorkommen, d. h. es muß $a_{12} = 0$ sein.

Unter diesen Bedingungen erhält man nämlich mittels Division durch a_{11} aus Nr. 18)

$$20)\qquad x^2 + y^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{11}}x + 2\frac{a_{23}}{a_{11}}y + \frac{a_{33}}{a_{11}} = 0.$$

Diese Gleichung bedeutet einen Kreis mit der Mitte a, b und dem Halbmesser k, wenn

$$a = -\frac{a_{13}}{a_{11}},\quad b = -\frac{a_{23}}{a_{11}},$$

$$a^2 + b^2 - k^2 = \frac{a_{33}}{a_{11}}.$$

Setzt man die beiden ersten Formeln in die dritte ein, so erhält man

$$k = \frac{1}{a_{11}}\sqrt{a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33}}.$$

Soll der Kreis möglich sein, so muß sich für k ein reeller, von

Null verschiedener Wert ergeben, und dies tritt nur unter der Bedingung ein

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33} > 0 .$$

Ist dagegen

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33} = 0 ,$$

so geht 20) über in

$$21) \qquad \left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2 = 0 .$$

Dieser Gleichung wird nur durch den Punkt

$$x = -\frac{a_{13}}{a_{11}}, \quad y = -\frac{a_{23}}{a_{11}}$$

genügt; man kann daher 21) als Gleichung eines verschwindend kleinen Kreises ansehen.

Ist endlich

$$a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{11}a_{33} < 0 ,$$

so wird k imaginär; die Gleichung 20) nimmt dann die Form an

$$\left(x + \frac{a_{13}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{23}}{a_{11}}\right)^2 + (a_{11}a_{33} - a_{13}^2 - a_{23}^2) = 0 .$$

Da die beiden ersten Klammern für reelle x und y positiv sind, so kann dieser Gleichung nicht durch reelle Werte von x und y genügt werden.

Wir erkennen hieraus, daß eine den beiden oben gegebenen Bedingungen entsprechende Gleichung zweiten Grades zwischen x und y, wenn überhaupt eine Linie, notwendig einen Kreis geben muß. Zur Einübung benutzen wir die folgenden Aufgaben.

I. Man soll den Ort der Scheitel aller derjenigen Dreiecke suchen, die auf einer gegebenen Grundlinie c stehen und in denen die beiden andern Seiten ein konstantes Verhältnis $1 : \varepsilon$ besitzen.

Die Grundlinie c werde zur x-Achse und einer ihrer Endpunkte zum Koordinatenanfange gewählt. Bezeichnen nun für irgend eine Lage des Dreiecks x und y die Koordinaten des Scheitels, so sind die Längen der beiden andern Dreiecksseiten

$$\sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{(x - c)^2 + y^2} ,$$

und wenn sich diese wie $1 : \varepsilon$ verhalten, so entsteht als Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\varepsilon \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} .$$

oder nach Quadrierung und Verbindung der gleichnamigen Glieder

$$22)\qquad (x^2+y^2)(1-\varepsilon^2)-2cx+c^2=0.$$

Unter der Voraussetzung, daß ε einen von der Einheit verschiedenen Wert besitzt, folgt hieraus:

$$x^2+y^2-2\frac{c}{1-\varepsilon^2}x+\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}=0.$$

Die letztere Form zeigt für den gesuchten Ort einen Kreis an, der zu Mittelpunktskoordinaten $a=c:(1-\varepsilon^2)$ und $b=0$ hat. Die Potenz des Koordinatenanfanges für diesen Kreis ist $c^2:(1-\varepsilon^2)$. Man findet hieraus den Radius

$$k=\sqrt{\frac{c^2}{(1-\varepsilon^2)^2}-\frac{c^2}{1-\varepsilon^2}}=\frac{c\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

für den Fall, das $\varepsilon<1$; im entgegengesetzten Falle ist das entgegengesetzte Vorzeichen zu wählen.

Wenn $\varepsilon=1$, d. h. wenn die Dreiecke gleichschenklig sein sollen, verschwinden in der ersten Gleichungsform unter Nr. 22) die quadratischen Glieder und es bleibt für die gesuchte Ortsgleichung nach gehöriger Hebung:

$$x=\tfrac{1}{2}c.$$

Der Kreis geht dann in das Mittellot der gemeinschaftlichen Grundlinie der Dreiecke über.

II. Zu n festen Punkten soll der geometrische Ort eines beweglichen Punktes gesucht werden, der die Eigenschaft besitzt, daß die Summe der Quadrate seiner Entfernungen von allen gegebenen Punkten einem konstanten Quadrate q^2 gleich ist.

Es seien a_1b_1, a_2b_2, $\cdots a_nb_n$ die Koordinaten der n festen Punkte und xy die des gesuchten Punktes in einer seiner Lagen, so führt die gestellte Aufgabe zu der Gleichung

$$\left.\begin{array}{l}(x-a_1)^2+(y-b_1)^2\\+(x-a_2)^2+(y-b_2)^2\\+\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\+(x-a_n)^2+(y-b_n)^2\end{array}\right\}=q^2.$$

Nach Auflösung der Klammern und Verbindung der in den einzelnen Horizontalreihen gleiche Stellung einnehmenden Glieder führen

wir mit Anwendung des Summenzeichens Σ die abgekürzten Bezeichnungen ein:

$$\Sigma(a) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$\Sigma(a^2) = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \text{ u. s. f.}$$

Dann ergibt sich für die gesuchte Ortsgleichung:

$$nx^2 + ny^2 - 2x \cdot \Sigma(a) - 2y \cdot \Sigma(b) + \Sigma(a^2) + \Sigma(b^2) - q^2 = 0,$$

oder nach Division durch n:

$$x^2 + y^2 - 2x \cdot \frac{\Sigma(a)}{n} - 2y \cdot \frac{\Sigma(b)}{n} + \frac{\Sigma(a^2) + \Sigma(b^2) - q^2}{n} = 0.$$

Man erkennt hierin einen Kreis mit den Mittelpunktskoordinaten

$$a = \frac{\Sigma(a)}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$
$$b = \frac{\Sigma(b)}{n} = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}.$$

Nach § 3, V sind dies die Koordinaten des Schwerpunkts für die gegebenen, gleichschweren Punkte. Beachten wir hierbei, daß in der auf den gesuchten Kreis bezogenen Potenz $\frac{\Sigma(a^2) + \Sigma(b^2) - q^2}{n}$ des angenommenen Koordinatenanfanges der Wert q immer so gewählt werden kann, daß der Radius eines der Aufgabe genügenden Kreises irgend einen gegebenen Wert enthält, so gelangen wir zu folgendem Lehrsatze:

Wenn man den Schwerpunkt eines Systems fester Punkte zum Zentrum eines Systems konzentrischer Kreise wählt, so besitzen diese Kreise die Eigenschaft, daß die Quadrate der Entfernungen jedes ihrer Punkte von allen gegebenen Punkten eine für jeden einzelnen Kreis unveränderliche Summe geben.

§ 10. Der Kreis und die Gerade.

Die Beziehungen zwischen einem Kreise und einer Geraden haben wir zwar bereits aus der Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten vollständig erkannt, es ist aber angezeigt, sie nochmals aus den Gleichungen des Kreises und der Geraden zu entwickeln. Der Einfachheit wegen legen wir den Nullpunkt in den Mittelpunkt des Kreises, während wir über die Lage der Geraden

keine besonderen Voraussetzungen machen. Die Gleichungen der beiden Linien haben dann die Form:

$$x^2 + y^2 = k^2 \text{ und } y = Ax + b,$$

wobei den Konstanten A und b die bekannten Deutungen zukommen.

Sollen beide Linien gemeinschaftliche Punkte besitzen, so müssen die Koordinaten dieser Punkte den beiden gegebenen Gleichungen Genüge leisten. Durch Entfernung von y findet sich dann für das zugehörige x:

1) $$(1 + A^2)x^2 + 2Abx + (b^2 - k^2) = 0.$$

Der Wert von y kann aus der Gleichung $y = Ax + b$ berechnet werden.

Die unter Nr. 1) aufgestellte Gleichung ist unter allen Umständen eine quadratische, da der zu x^2 gehörende Faktor $1 + A^2$ nie kleiner als die positive Einheit werden kann. Man erhält daher immer zwei Werte von x und ebensoviele für die zugehörigen y, deren Beschaffenheit aus der Diskriminante*) dieser quadratischen Gleichung abgeleitet werden kann, nämlich aus:

$$\Delta = (1 + A^2)(b^2 - k^2) - A^2 b^2,$$

oder, wie man nach einfacher Umformung erhält, aus:

$$\Delta = (1 + A^2)\left(\frac{b^2}{1 + A^2} - k^2\right).$$

Da in dem letzteren Ausdrucke der Faktor $1 + A^2$ weder verschwinden, noch einen Einfluß auf das Vorzeichen des Produktes ausüben kann, so hängt die Beschaffenheit der beiden Wurzeln lediglich von dem Faktor $\frac{b^2}{1 + A^2} - k^2$ ab, und es sind dieselben

*) Aus der quadratischen Gleichung $\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma = 0$ findet man nach den gewöhnlichen Methoden:

$$x = \frac{-\beta \pm \sqrt{-\Delta}}{\alpha},$$

worin zur Abkürzung des Ausdruckes

$$\Delta = \sqrt{\alpha\gamma - \beta^2}$$

gesetzt ist. Die beiden Wurzeln sind hiernach reell und verschieden, reell und gleich oder endlich imaginär, je nachdem $\Delta < 0$, $\Delta = 0$ oder $\Delta > 0$. Die Größe Δ, deren Wert hierbei entscheidend ist, wird die Diskriminante oder Determinante der betrachteten quadratischen Gleichung genannt.

reell und verschieden, reell und gleich oder endlich imaginär, je nachdem

$$k^2 \gtreqless \frac{b^2}{1+A^2}.$$

Die bei Unterscheidung dieser drei Fälle vorkommende Größe $\frac{b^2}{1+A^2}$ ist nach Nr. 11) im § 6 das Quadrat der Entfernung der gegebenen geraden Linie vom Koordinatenanfange, d. i. hier vom Kreismittelpunkte, es kommen also die drei Fälle darauf hinaus, dieses Quadrat mit dem Quadrate des Halbmessers oder, wenn wir zu den ersten Potenzen zurückgehen, den Halbmesser mit der erwähnten Entfernung zu vergleichen. Je nachdem der Halbmesser größer ist als die Entfernung, ihr gleich oder kleiner ist, haben Kreis und Gerade zwei Punkte, einen Punkt oder keinen Punkt gemein. Durch die gefundenen Bedingungen werden daher in der Sprache der analytischen Geometrie Sekanten, Tangenten und solche Gerade unterschieden, welche in allen ihren Punkten außerhalb des Kreises liegen.

Bringt man die Gleichung 1), indem man durch $1 + A^2$ dividiert, auf die Form

$$x^2 + 2x \cdot \frac{Ab}{1+A^2} + \frac{b^2-k^2}{1+A^2} = 0,$$

so finden nach der Theorie der quadratischen Gleichungen, wenn x_1 und x_2 die Wurzeln dieser Gleichung, d. i. die Abscissen der dem Kreise und der Geraden gemeinschaftlichen Punkte P_1 und P_2 (Fig. 20) bedeuten, die Beziehungen statt:

2) $$x_1 + x_2 = -\frac{2Ab}{1+A^2}.$$

Fig. 20.

Sind y_1 und y_2 die Ordinaten von P_1 und P_2, so ist

$$y_1 = Ax_1 + b, \quad y_2 = Ax_2 + b,$$

und daher

3) $$y_1 + y_2 = A(x_1 + x_2) + 2b = \frac{2b}{1+A^2}.$$

Die Koordinaten der Mitte der Strecke P_1P_2 sind bekanntlich $\frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ und $\frac{1}{2}(y_1 + y_2)$; bezeichnet man sie mit ξ und η, so hat man daher

$$\xi = -\frac{Ab}{1+A^2}, \quad \eta = \frac{b}{1+A^2}.$$

woraus die Beziehung folgt

$$\xi + A\eta = 0.$$

Die Gleichung $x + Ay = 0$ bedeutet bekanntlich eine Gerade, die den Nullpunkt enthält und zu der Geraden $y = Ax + b$ senkrecht ist. Die Mitten aller Kreissehnen, die dasselbe A, also dieselbe Richtung haben, liegen also auf dem zu ihnen senkrechten Durchmesser — ein aus den Elementen bereits bekannter Satz.

Da sich das letzte Resultat auf alle Geraden mit der Richtungskonstante A bezieht, so hat es auch dann noch Gültigkeit, wenn eine solche Gerade Tangente wird. Die beiden Punkte P_1 und P_2 fallen dann mit $\xi\eta$ in einen, nämlich den Berührungspunkt zusammen, und die Gleichung

$$\xi + A\eta = 0$$

gehört, wenn man ξ und η als veränderliche Koordinaten betrachtet, dem im Berührungspunkte auf der Tangente errichteten Lote oder der sogenannten Normale an. Die Form dieser Gleichung zeigt, daß alle Normalen des Kreises durch seinen Mittelpunkt gehen. Mittels dieser bekannten Eigenschaft ist es leicht, die Gleichung einer an den Kreis gezogenen Tangente zu bilden, für welche der Berührungspunkt $x_1 y_1$ gegeben ist. Wir finden zunächst für die Richtungskonstante der Normale, da sie durch den Punkt $x_1 y_1$ und den Koordinatenanfang geht, nach Nr. 9) im § 5 den Wert $\frac{y_1}{x_1}$, folglich für die darauf senkrechte Tangente mit Rücksicht auf § 6 Nr. 6) die Gleichung:

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

woraus nach einfacher Umformung

$$x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2$$

entsteht. Da $x_1 y_1$ ein Peripheriepunkt, also $x_1^2 + y_1^2 = k^2$ ist, so erhält man mit Einsetzung dieses Wertes für die Gleichung der im Punkte $x_1 y_1$ an den Kreis gelegten Tangente:

3) $$x_1 x + y_1 y = k^2.$$

Mit Umgehung der Normale gelangen wir zu derselben Gleichung, wenn wir in der Gleichung 1), welche für die Abscissen der dem Kreise und der Geraden gemeinschaftlichen Punkte gültig war, die Bedingung einführen, unter welcher die beiden Durch-

schnittspunkte in einen zusammenfallen. Für den Berührungspunkt $x_1 y_1$ der an den Kreis $x^2 + y^2 = k^2$ gezogenen Tangente $y = Ax + b$ haben wir nämlich nach Nr. 1) die Gleichung:

$$(1 + A^2) x_1^2 + 2Abx_1 + (b^2 - k^2) = 0,$$

worin, damit die beiden Wurzeln gleich werden,

$$(1 + A^2)(b^2 - k^2) = A^2 b^2 \text{ oder } b^2 - k^2 = \frac{A^2 b^2}{1 + A^2}$$

sein muß. Man erhält hiermit nach Division durch $1 + A^2$:

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot \frac{Ab}{1 + A^2} + \left(\frac{Ab}{1 + A^2}\right)^2 = \left(x_1 + \frac{Ab}{1 + A^2}\right)^2 = 0,$$

$$x_1 = -\frac{Ab}{1 + A^2}.$$

Mittels der Gleichung $y_1 = Ax_1 + b$ findet sich ferner:

$$y_1 = \frac{b}{1 + A^2},$$

und durch Verbindung der beiden letzten Gleichungen entsteht für die Richtungskonstante der Tangente:

$$A = -\frac{x_1}{y_1}.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes in die Gleichung

$$y - y_1 = A(x - x_1),$$

welche allen durch den Punkt $x_1 y_1$ gehenden Geraden, also auch der Berührenden angehört, kommen wir zu der früher gefundenen Tangentengleichung zurück.

Aus der Gleichung 3) erhält man die Gleichung der Tangente für die allgemeine Lage des Kreises durch Verschiebung der Koordinatenachsen. Hat der Kreismittelpunkt im neuen Systeme die Koordinaten a, b, so hat man, um die Änderung auszuführen, x, y, x_1, y_1 der Reihe nach durch $x - a$, $y - b$, $x_1 - a$, $y_1 - b$ zu ersetzen und erhält zunächst die Tangentengleichung

$$(x_1 - a)(x - a) + (y_1 - b)(y - b) = k^2,$$

woraus sich leicht noch die Form ergibt

$$4) \quad (x_1 - a)x + (y_1 - b)y - ax_1 - by_1 + a^2 + b^2 - k^2 = 0.$$

Dies stimmt vollständig mit der Gleichung überein, die wir oben (S. 59) für die Polare des Punktes P_1 gefunden. Wir haben somit: Rückt der Punkt P_1 auf den Umfang des Kreises, so geht seine Polare in die Tangente in P_1 über.

Die für eine Tangente mit gegebenem Berührungspunkte gefundene Gleichung 3) gewährt uns die Mittel, folgende Aufgabe zu lösen:

Von einem außerhalb eines gegebenen Kreises gelegenen Punkte $x_1 y_1$ sollen an diesen Kreis Berührende gezogen werden; es sind die Berührungspunkte zu bestimmen.

Wird ein der gestellten Aufgabe genügender Berührungspunkt mit $\xi\eta$ bezeichnet, so erhält nach dem Vorigen die an diesen Punkt gelegte Tangente die Gleichung:

$$\xi x + \eta y = k^2,$$

die, wenn die Tangente durch den gegebenen Punkt $x_1 y_1$ gehen soll, auch noch mit Einsetzung von x_1 und y_1 für x und y ihre Geltung behalten muß. Beachtet man ferner, daß der Punkt $\xi\eta$ auf der Kreislinie liegen soll, so hat man zu seiner Bestimmung folgende zwei Gleichungen:

$$\xi x_1 + \eta y_1 = k^2,$$
$$\xi^2 + \eta^2 = k^2.$$

Da die eine dieser beiden Gleichungen quadratisch ist, so müssen sich zwei zusammengehörige Paare von Werten für ξ und η finden: die Aufgabe läßt also im allgemeinen eine doppelte Lösung zu, was dem bekannten elementar-geometrischen Satze entspricht, daß von einem Punkte außerhalb eines Kreises zwei Tangenten an diesen gezogen werden können. — Die Berechnung der Werte von ξ und η kann der Selbstübung überlassen bleiben. Einfacher gelangen wir auf die folgende Weise zum Ziele.

Wenn in der ersten der beiden zur Ermittelung von ξ und η führenden Gleichungen, nämlich in

$$\xi x_1 + \eta y_1 = k^2$$

ξ und η als veränderlich angesehen werden, so gehört dieselbe als Gleichung ersten Grades einer geraden Linie an, die durch die beiden gesuchten Berührungspunkte hindurchgehen muß. Bezeichnen wir nun wie gewöhnlich die laufenden Koordinaten mit x und y, so ist mit geänderter Ordnung der Faktoren

5) $$x_1 x + y_1 y = k^2$$

die Gleichung der sogenannten Berührungssehne (dieselbe nach

beiden Seiten hin unendlich verlängert gedacht, in deren Durchschnitten mit dem gegebenen Kreise sich die beiden Berührungspunkte vorfinden. Dies ist die Gleichung der Polaren des Punktes P_1, wie man aus 4) erkennt, wenn man $a = b = 0$ setzt.

§ 11. Zwei Kreise.

Die gegenseitigen Lagen zweier Kreise können immer auf die eines Kreises und einer Geraden zurückgeführt werden. Sind nämlich, um von einer möglichst allgemeinen Auffassung auszugehen, die Gleichungen der beiden Kreise nach Nr. 4) im § 9 in der Form

$$1)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + P_1 = 0, \\ x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + P_2 = 0 \end{cases}$$

gegeben, so muß für ihre etwa vorhandenen gemeinschaftlichen Punkte auch jede neue Gleichung gültig sein, welche als notwendige Folge der beiden gegebenen auftritt. Durch Subtraktion entsteht die Gleichung ersten Grades:

$$2)\quad 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y - P_1 + P_2 = 0,$$

d. i. die Gleichung derjenigen Geraden, welche die Durchschnittspunkte der beiden zu untersuchenden Kreise enthält, unter der Voraussetzung, daß solche Punkte vorhanden sind. Können hiernach die beiden Kreise nur Punkte miteinander gemein haben, welche gleichzeitig in dieser Geraden gelegen sind, so folgt zunächst mit Rücksicht auf den vorhergehenden Paragraphen, daß solcher Punkte höchstens zwei vorhanden sein werden. Die durch die Gleichung 2) charakterisierte Linie selbst stellt die gemeinschaftliche Sekante der beiden Kreise oder ihre gemeinschaftliche Tangente dar, oder liegt endlich außerhalb beider Kreise, je nachdem dieselben sich schneiden, sich berühren oder keine gemeinschaftlichen Punkte besitzen. Zu einer auf alle diese drei Lagen bezüglichen Eigenschaft der fraglichen Geraden gelangen wir durch die folgende Untersuchung.

Mit Einführung der abgekürzten Bezeichnung

$$3)\quad \begin{cases} H_1 = x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + P_1, \\ H_2 = x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + P_2 \end{cases}$$

können die Gleichungen der beiden Kreise auf die Ausdrücke

$$H_1 = 0 \quad \text{und} \quad H_2 = 0$$

reduziert werden. Die durch Subtraktion entstandene Gleichung 2) gewinnt hiermit die Form

$$\Pi_2 - \Pi_1 = 0,$$

oder auch

4) $$\Pi_1 = \Pi_2.$$

Hierin ist die geometrische Eigenschaft der Linie enthalten, zu der man leicht gelangt, wenn man auf die Werte von Π_1 und Π_2 zurückgeht. Drücken wir zu diesem Endzwecke P_1 mit Benutzung der Formel 7) im § 9 durch a_1, b_1 und k_1 aus, wobei k_1 den Radius des Kreises bedeutet, für welchen a_1 und b_1 die Mittelpunktskoordinaten darstellen, so kann die erste der Gleichungen unter Nr. 3) auf die Form

$$\Pi_1 = (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - k_1^2$$

gebracht werden. Nach einer bereits mehrfach angewendeten Formel stellt hierin die Quadratwurzel des Ausdruckes

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2$$

die Entfernung des Punktes xy vom Kreismittelpunkte $a_1 b_1$ dar, die wir mit e_1 bezeichnen wollen. Für Π_1 ergibt sich hieraus der Wert

$$\Pi_1 = e_1^2 - k_1^2.$$

Mit Rücksicht auf die im § 9 gewonnene Deutung der dortigen Gleichung 7), welche mit der jetzt gefundenen in der Form vollkommen übereinstimmt, bewährt sich hiernach Π_1 als Potenz des Punktes xy für den Kreis, welchem die Konstanten a_1, b_1 und k_1 zukommen. In ganz gleicher Weise gelangen wir zu der Erkenntnis, daß Π_2 die Potenz des Punktes xy für den zweiten der in Untersuchung befindlichen Kreise darstellt. Hieraus folgt, daß die durch die Gleichung 4), also auch durch die hiermit identische unter Nr. 2) bezeichnete Gerade die Eigenschaft besitzt, daß jedem ihrer Punkte in Beziehung auf beide Kreise gleiche Potenzen zukommen. Nach dieser Eigenschaft soll sie die Linie gleicher Potenzen oder kurz Potenzlinie für die beiden Kreise genannt werden. Mittels der bekannten Bedeutung der Potenz eines Punktes für einen Kreis folgt hieraus unter anderem, daß, wenn man von einem außerhalb der beiden Kreise gelegenen Punkte dieser Linie an beide Kreise Tangenten legt, die zwischen diesem Punkte und den Berührungspunkten gemessenen Strecken dieser Tangenten gleich

lang sind, daß also z. B. die von den Berührungspunkten begrenzten Strecken der gemeinschaftlichen Tangenten beider Kreise von der Potenzlinie halbiert werden. Hiernach führt sie auch die Benennung Linie der gleichen Tangenten.

Eine zweite allgemeine Eigenschaft der Potenzlinie wird gewonnen, wenn wir ihre in Nr. 2) enthaltene Gleichung auf die Form

$$y = -\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}\,x + \frac{P_1 - P_2}{2(b_1 - b_2)}$$

bringen, worin $-\frac{a_1 - a_2}{b_1 - b_2}$ die Richtungskonstante bezeichnet. Nach Nr. 5) im § 6 zeigt sich, daß eine Gerade mit der Richtungskonstante $\frac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$ von ihr rechtwinklig durchschnitten wird. Diese letztere Konstante gehört aber nach Nr. 9) im § 5 der Mittellinie der beiden Kreise, d. i. der ihre Mittelpunkte verbindenden Geraden, zu. Hieraus entsteht der Satz: Die Potenzlinie zweier Kreise steht auf der Mittellinie dieser Kreise senkrecht, wie für den Fall, wo die Potenzlinie in die gemeinschaftliche Sekante oder gemeinsame Tangente übergeht, aus der Elementargeometrie bekannt ist.

Wird zu den beiden Kreisen noch ein dritter hinzugefügt, so sind nach Nr. 4) die Gleichungen der Potenzlinien dieser drei Kreise

$$\Pi_1 - \Pi_2 = 0\,, \quad \Pi_2 - \Pi_3 = 0\,, \quad \Pi_3 - \Pi_1 = 0\,.$$

Die Summe der linken Seiten verschwindet identisch; daher folgt (§ 7, III): Die Potenzlinien dreier Kreise schneiden sich in einem Punkte.

Dieser Lehrsatz kann benutzt werden, um die Potenzlinie zweier sich nicht schneidenden und auch nicht berührenden Kreise zu konstruieren. Legt man nämlich einen dritten Kreis so, daß er die beiden gegebenen Kreise schneidet, so sind die gemeinschaftlichen Sekanten zwei Potenzlinien, durch deren Durchschnittspunkt auch die dritte, den beiden gegebenen Kreisen angehörige hindurchgehen muß. Die durch diesen Punkt gelegte Senkrechte zur Zentrallinie der beiden ersten Kreise stellt die gesuchte Gerade dar. Die Fällung der Senkrechten kann auch umgangen werden, wenn man einen vierten Kreis zu Hilfe nimmt, welcher wieder die beiden gegebenen schneidet, und mittels der gemeinsamen Sekanten einen zweiten Punkt der gesuchten Potenzlinie konstruiert.

Gehen wir zu der Aufgabe über, mittels der Potenzlinie die gegenseitigen Lagen zweier Kreise analytisch zu untersuchen, so soll zunächst zur Vereinfachung der Rechnung das Koordinatensystem so gelegt werden, daß die Gleichungen der beiden Kreise eine möglichst einfache Form gewinnen. Wir treffen hierzu folgende Bestimmungen: Der Mittelpunkt des einen der beiden Kreise, und zwar bei Verschiedenheit der Halbmesser der Mittelpunkt des größeren (mit dem Radius K) werde zum Koordinatenanfangspunkte gewählt und die positive Seite der x-Achse durch das Zentrum des zweiten Kreises (dessen Radius k sein soll) gelegt; die positive Zahl a gibt den Abstand beider Mittelpunkte an. Die Gleichungen der zwei Kreise sind unter diesen Voraussetzungen:

$$5)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = K^2, \\ (x-a)^2 + y^2 = k^2. \end{cases}$$

Man erhält hieraus durch Subtraktion als Gleichung der Potenzlinie

$$2ax - a^2 = K^2 - k^2,$$

welche leicht auf die Form

$$6)\qquad x = \frac{a^2 + K^2 - k^2}{2a} \quad \text{oder} \quad x = \frac{a}{2} + \frac{K^2 - k^2}{2a}$$

gebracht werden kann. Nach dieser Form zeigt sich die Potenzlinie parallel zur y-Achse oder senkrecht zur x-Achse in Übereinstimmung mit der bereits bewiesenen Eigenschaft der rechtwinkligen Lage zur Mittellinie. Zugleich sehen wir, daß sie stets dem Mittelpunkte des kleineren Kreises näher gelegen sein muß, indem sie durch denjenigen Punkt der Zentrallinie hindurchgeht, welcher um den nach den Voraussetzungen positiven Abstand $\frac{K^2 - k^2}{2a}$ von der Mitte der Strecke a entfernt ist. Im Falle der Gleichheit beider Kreise liegt die Potenzlinie von den Mittelpunkten gleichweit entfernt.

Zur Trennung der möglichen Lagen unterscheiden wir folgende drei Fälle:

α. Ist $x > K$, so liegt die Potenzlinie außerhalb des größeren, also auch außerhalb des kleineren Kreises, da etwa vorhandene gemeinschaftliche Punkte stets allen drei Linien gemeinsam sein müssen. Nach Nr. 6) erhalten wir für diesen Fall die Bedingung

$$\frac{a^2 + K^2 - k^2}{2a} > K$$

und nach leichter Umgestaltung

$$(a - K)^2 - k^2 > 0$$

oder

$$\{a - (K + k)\}\{a - (K - k)\} > 0 .$$

Der letzteren Ungleichung wird nur genügt, wenn

entweder $a > K + k$, wobei von selbst $a > K - k$,

oder $a < K - k$, " " " $a < K + k$.

Im ersteren dieser beiden Fälle ist $a^2 > (K + k)(K - k)$ oder $K^2 - k^2 < a^2$, folglich mit Rücksicht auf Nr. 6) $x < a$. Die Potenzlinie liegt hiernach zwischen beiden Kreisen, sodaß dieselben vollständig voneinander getrennt sind. Im zweiten Falle erhält man in gleicher Weise $K^2 - k^2 > a^2$ und $x > a$, die Potenzlinie liegt hierbei außerhalb der beiden Kreise, von welchen der eine den andern umschließt.

β. Wenn $x = K$, so ergibt sich durch eine ähnliche Rechnung wie vorher die Bedingungsgleichung:

$$\{a - (K + k)\}\{a - (K - k\} = 0 ,$$

welche nur Befriedigung erlangt, wenn entweder $a = K + k$ oder $a = K - k$. Die Potenzlinie ist hierbei gemeinsame Tangente der beiden Kreise, welche sich im ersten Falle von außen, im zweiten von innen berühren.

γ. Sobald $x < K$, schneidet die Potenzlinie beide Kreise, die demnach einander selbst durchschneiden müssen. Als Bedingung hierfür entsteht:

$$\{a - (K + k)\}\{a - (K - k)\} < 0 ,$$

was nur möglich ist, wenn

$$K + k > a > K - k .$$

Die analytische Untersuchung der Potenzlinie führt hiernach auf die aus der Elementargeometrie bekannten Unterscheidungsmerkmale der Lagen zweier Kreise zurück.

§ 12. Kreisgleichung für schiefwinklige Koordinaten.

Soll die allen vorhergehenden Betrachtungen zu Grunde gelegte Eigenschaft des Kreises, daß jeder Peripheriepunkt denselben Abstand vom Mittelpunkte besitzt, durch schiefwinklige Koordinaten ausgedrückt werden, so entsteht mit Beibehaltung der früher für

die Mittelpunktskoordinaten und den Radius eingeführten Bezeichnungen nach Nr. 2) im § 3 als allgemeinste Gleichung:

$$1)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\omega=k^2,$$

worin wieder ω den Koordinatenwinkel darstellt. Zunächst kann diese Gleichung auf die Form

$$x^2+y^2+2xy\cos\omega-2(a+b\cos\omega)x-2(b+a\cos\omega)y$$
$$+(a^2+b^2+2ab\cos\omega-k^2)=0$$

gebracht werden, und wenn wir hierin zur Abkürzung

$$2)\qquad \begin{aligned} a+b\cos\omega=m,\qquad b+a\cos\omega=n,\\ a^2+b^2+2ab\cos\omega-k^2=P \end{aligned}$$

setzen, so geht sie über in:

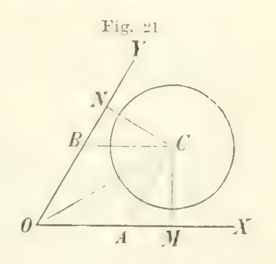
$$3)\qquad x^2+y^2+2xy\cos\omega-2mx-2ny+P=0.$$

Was die Bedeutung der hierbei benutzten Konstanten m, n und P betrifft, so ist vor allen Dingen leicht ersichtlich, daß unter P wieder die Potenz des Koordinatenanfanges für den Kreis zu verstehen ist. Setzen wir nämlich

$$a^2+b^2+2ab\cos\omega=c^2,$$

so stellt c nach Nr. 9) im § 2 die Entfernung des Kreismittelpunktes vom Koordinatenanfangspunkte dar. Mit Substitution dieses Wertes in den Ausdruck für P kommen wir aber zur Gleichung 7) des § 9, folglich auch zu allen daraus gezogenen Folgerungen zurück. Rücksichtlich der Deutung der Konstanten m und n ist auf die erste der Gleichungen 7) im § 2 zu verweisen, nach welcher $m=b\cos\omega+a$ die Projektion des Radiusvektor des Mittelpunktes auf die x-Achse und n (wie sich sofort aus Vertauschung der Achsenbezeichnung ergibt) die Projektion derselben Strecke auf die y-Achse darstellt. Bestätigt wird dieses Resultat in Fig. 21, worin $a=OA=BC$ und $b=OB=AC$, ferner $m=OM$ und $n=ON$ ist.

Fig. 21



Wird die unter 3) gewonnene Gleichung des Kreises mit der im § 9 Nr. 18) angeführten allgemeinen Gleichung zweiten Grades

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+a_{22}y^2+2a_{23}y+a_{33}=0$$

in Vergleichung gebracht, so zeigt sich, daß die letztere notwendig

einem Kreise — wenn überhaupt einer Linie — angehören muß, sobald der Relation

4) $$a_{11} : a_{12} : a_{22} = 1 : \cos\omega : 1$$

Genüge geleistet ist. Der Weg, welcher zu diesem Resultate führt, ist mit dem im § 9 bei Nr. 18) eingeschlagenen vollkommen übereinstimmend.

Die im vorigen aufgestellten Formeln gehen selbstverständlich in die für rechtwinklige Koordinaten gültigen über, wenn $\omega = 90^0$ gesetzt wird. Dabei vereinfachen sich aber die Beziehungen so sehr, daß es sich fast für alle auf den Kreis bezüglichen Untersuchungen empfiehlt, vom Gebrauche schiefwinkliger Koordinaten abzusehen. Wir beschränken uns daher einzig auf das folgende Beispiel:

Es soll die Gleichung eines Kreises aufgesucht werden, welcher die Achsen eines beliebigen Parallelkoordinatensystems berührt.

Aus Nr. 3) ergibt sich bei noch unbestimmter Lage des Koordinatensystems für die Abscissen der gemeinschaftlichen Punkte des Kreises und der x-Achse mittels der Substitution $y = 0$ die Gleichung:

$$x^2 - 2mx + P = 0,$$

deren linke Seite zu einem vollständigen Quadrat werden muß, wenn die x-Achse Tangente sein soll: man erhält dafür die Bedingung:

$$P = m^2.$$

In gleicher Weise entsteht als Bedingung dafür, daß die y-Achse vom Kreise berührt wird:

$$P = n^2.$$

Treffen wir nun noch die Verfügung, daß beide Berührungspunkte in den positiven Teilen der Koordinatenachsen gelegen sein sollen, also im Vorzeichen übereinstimmen müssen, so führt die aus den beiden letzten Gleichungen folgende Relation $m^2 = n^2$ zu dem Resultate:

$$m = n.$$

Durch Einsetzung dieser Werte in die frühere allgemeine Gleichung erhalten wir

5) $$x^2 + y^2 + 2xy\cos\omega - 2mx - 2my + m^2 = 0$$

für die Gleichung des der gestellten Aufgabe entsprechenden Kreises. Die Substitutionen $x = 0$ und $y = 0$ zeigen, daß hierin m den

Abstand der in den Achsen gelegenen Berührungspunkte vom Koordinatenanfange ausdrückt*).

Wird in der Gleichung 5) beiderseitig das Produkt

$$2xy(1-\cos\omega) = 4xy\sin^2\tfrac{1}{2}\omega$$

addiert, so gewinnt sie die einfachere Form:

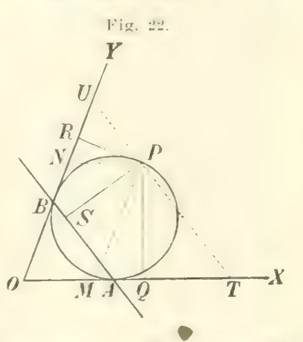
6) $$(x+y-m)^2 = 4xy\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\,.$$

Multipliziert man hierin noch auf beiden Seiten mit $\cos^2\frac{1}{2}\omega$ und beachtet dabei, daß $4\sin^2\frac{1}{2}\omega\cos^2\frac{1}{2}\omega = \sin^2\omega$, so kann das Ergebnis in folgender Weise geschrieben werden:

7) $$\left\{(x+y-m)\cos\tfrac{1}{2}\omega\right\}^2 = x\sin\omega\cdot y\sin\omega\,.$$

Diese letztere Form der Gleichungen 5) und 6) führt zu einer einfachen geometrischen Deutung. Stellt nämlich in Fig. 22 AB die den tangierenden Koordinatenachsen zugehörige Berührungssehne dar, so lege man durch den beliebigen Peripheriepunkt P die Gerade $TU \parallel AB$. Dann ist, weil $OA = OB = m$, auch $NP = NU = x$ und $MT = MP = y$, folglich $x + y - m = AT = BU$, und $(x+y-m)\cos\frac{1}{2}\omega = SP$, wenn SP senkrecht zur Berührungssehne, also unter dem Winkel $\frac{1}{2}\omega$ gegen jede der beiden Koordinatenachsen gezogen ist. Ferner erhält man $x\sin\omega = RP$ und $y\sin\omega = QP$, wobei QP und RP rechtwinklig gegen die Koordinatenachsen gestellt sind. Hiermit gewinnt die Gleichung 7) die Deutung:

Fig. 22.



$$SP^2 = RP\cdot QP$$

und schließt den folgenden Lehrsatz in sich: Im Kreise ist der Abstand jedes Peripheriepunktes von der Berührungssehne zweier Tangenten die mittlere Proportionale zwischen den Entfernungen desselben Punktes von den beiden Tangenten.

*) Dasselbe Resultat folgt auch aus der Bedeutung von P, verbunden mit der obigen Gleichung $P = m^2$.

Viertes Kapitel.

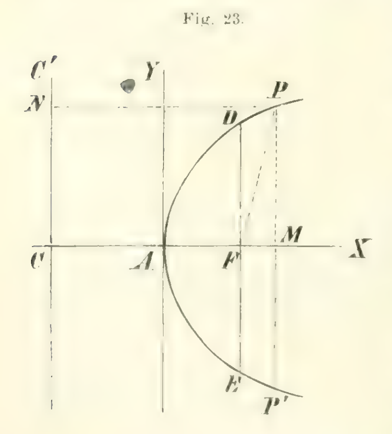
Die Kegelschnitte.

§ 13. Allgemeine Formen der Kegelschnittsgleichung.

Aus dem Umstande, daß infolge der in den §§ 9 und 12 angestellten Betrachtungen die allgemeine Gleichung zweiten Grades für Parallelkoordinaten sich nur unter beschränkten Bedingungen einem Kreise angehörig zeigt, erwächst die Aufforderung, noch andere Linien zweiten Grades ausfindig zu machen. Ohne deshalb für jetzt auf die Gleichung selbst zurückzugehen, wenden wir uns zu einer Untersuchung, die uns mit noch mehreren Linien dieser Art bekannt machen soll.

Der geometrische Ort eines Punktes in der Ebene, dessen Entfernungen von einem festen Punkte und einer festen Geraden derselben Ebene in einem unveränderlichen Verhältnisse ε zu einander stehen, führt den Namen eines Kegelschnittes, weil er unter anderem auf der Oberfläche eines Rotationskegels mittels des Durchschnittes mit einer Ebene räumlich dargestellt werden kann. Wir stellen uns die Aufgabe, diesen Ort nach der gegebenen Eigenschaft und unabhängig von seiner stereometrischen Entstehung analytisch zu untersuchen. Ist CC' die feste Gerade (Leitlinie), F der feste Punkt (Brennpunkt) und FC normal zu CC'; ist ferner P ein Punkt des Kegelschnitts

Fig. 23.



und PN normal zu CC', PM parallel CC', so ist die vorgelegte Bedingung

$$FP : NP = \varepsilon$$

oder

1) $$FP = \varepsilon \cdot NP = \varepsilon \cdot CM.$$

Ein Punkt A der Kurve ist auf der Strecke CF enthalten; für denselben ist

$$FA = \varepsilon \cdot CA,$$

also

$$CF = CA + FA = (1 + \varepsilon) \cdot CA.$$

Wenn man den Abstand CF mit d bezeichnet, so hat man daher

2) $$CA = \frac{d}{1+\varepsilon}, \quad AF = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}.$$

Aus der Definition des Kegelschnitts folgt, daß derselbe symmetrisch gegen die Gerade CF liegt. Daher wählen wir dieselbe zur Abscissenachse des Koordinatensystems. Den Anfangspunkt legen wir der Einfachheit wegen in den Punkt A. Denn ist die Gleichung einer Kurve

$$f(x, y) = c,$$

wobei links durch das Zeichen $f(x, y)$ ein Polynom angedeutet ist, dessen Glieder sämtlich x oder y oder beide Koordinaten in der ersten oder in höheren Potenzen als Faktoren haben, so verschwindet die ganze linke Seite, wenn man $x = y = 0$, d. i. die Koordinaten des Anfangspunktes, substituiert; soll nun der Anfangspunkt auf der Kurve liegen, so müssen seine Koordinaten der Gleichung der Kurve genügen, es muß daher $c = 0$ sein. Hieraus folgt: Legt man den Anfangspunkt des Koordinatensystems auf einen Punkt der Kurve, so enthält die Gleichung der Kurve, falls sie von der oben angegebenen Form ist, kein von x und y freies Glied.

Aus dem rechtwinkligen Dreiecke FPM folgt

$$FP^2 = y^2 + \left(x - \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2.$$

Ferner ist

$$CM = x + \frac{d}{1+\varepsilon}.$$

Daher hat man die Gleichung

3) $$\left(x - \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2 + y^2 = \varepsilon^2\left(x + \frac{d}{1+\varepsilon}\right)^2;$$

oder entwickelt

$$y^2 + x^2 - 2\frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}x + \left(\frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon^2 x^2 + 2\frac{\varepsilon^2 d}{1+\varepsilon}x + \left(\frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right)^2.$$

Hieraus folgt

4) $$y^2 = 2\varepsilon d x - (1 - \varepsilon^2)x^2.$$

Diese Gleichung ist rein quadratisch in Bezug auf y, und bestätigt dadurch die Symmetrie der Kurve gegen die x-Achse; denn zu jedem Werte von $x = AM$ gehören zwei entgegengesetzt gleiche Werte von y, MP und MP'; diese beiden Punkte P und P' liegen symmetrisch gegen die x-Achse.

Die Sehne ED, welche den Brennpunkt F enthält und normal zu AF ist, nennt man den Parameter der Kurve und bezeichnet ihn mit $2p$. Für den Halbparameter FD ergibt sich aus der Definition der Kurve

$$FD = \varepsilon \cdot CF;$$

daher hat man

5) $$p = \varepsilon d.$$

Führt man diesen Wert in die Kurvengleichung 4) ein, so erhält man

6) $$y^2 = 2px - (1 - \varepsilon^2)x^2.$$

Der Punkt A wird als ein Scheitel des Kegelschnitts und demgemäß die Gleichung 6) als Scheitelgleichung bezeichnet. Schreibt man sie in der Form

$$y^2 = x\,[2p - (1 - \varepsilon^2)x],$$

so erkennt man, daß y außer für den Wert $x = 0$ auch noch verschwindet, wenn

7) $$x = \frac{2p}{1 - \varepsilon^2}.$$

Die Kurve hat daher mit der Abscissenachse außer dem Anfangspunkte noch den Punkt gemein, dessen Abscisse $2p : (1 - \varepsilon^2)$ ist.

Diese Abscisse wird bei einem gegebenen Werte des Parameters um so größer, je kleiner die Differenz $1 - \varepsilon^2$ ist.

Geht ε zur Grenze 1 über, so rückt der zweite Schnittpunkt des Kegelschnitts mit der Symmetrieachse AF in unendliche Ferne. Die Kurvengleichung vereinfacht sich unter dieser Voraussetzung zu

8) $$y^2 = 2px.$$

Dieser besondere Kegelschnitt wird als Parabel bezeichnet.

Ist $\varepsilon < 1$, so ist $1 - \varepsilon^2 > 0$ und daher auch

$$\frac{2p}{1-\varepsilon^2}$$

positiv. Es liegt nahe, die Form der Kurvengleichung aufzusuchen, die man erhält, wenn der Anfangspunkt in die Mitte zwischen den beiden Schnittpunkten der Kurve mit der Abscissenachse verlegt wird. Bezeichnet man die Abscissen im neuen Systeme wieder mit x, so hat man, um die Verlegung auszuführen, in der Gleichung 6) die Abscisse durch die Summe aus der neuen Abscisse x und der Abscisse $p:(1-\varepsilon^2)$ des neuen Anfangspunktes zu ersetzen. Man erhält

$$y^2 = 2p\left(x + \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right) - (1-\varepsilon^2)\left[x^2 - \frac{2p}{1-\varepsilon^2}x + \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}\right]$$

$$= \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} - (1-\varepsilon^2)x^2,$$

oder, anders geordnet,

9) $$(1-\varepsilon^2)x^2 + y^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}.$$

Die durch diese Gleichung charakterisierte Kurve wird als Ellipse bezeichnet.

Ist $\varepsilon > 1$, so ist $1 - \varepsilon^2$ negativ. Will man den Anfangspunkt wieder in die Mitte der auf der Abscissenachse enthaltenen Kurvensehne verlegen, so hat man in der Gleichung 6) die Abscisse durch $x - p:(\varepsilon^2 - 1)$ zu ersetzen. Man erhält

$$y^2 = -\frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1} + (\varepsilon^2 - 1)x^2,$$

oder passender

10) $$(\varepsilon^2 - 1)x^2 - y^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Die hierdurch charakterisierte Kurve heißt Hyperbel.

Wenn ε sich der Grenze Null nähert, so verschwinden die Abstände aller Kurvenpunkte vom Brennpunkte im Verhältnis zu

ihren Abständen von der Leitlinie; sollen daher nicht die Dimensionen der Kurve verschwinden, so muß der Abstand der Leitlinie vom Brennpunkte ins Unendliche rücken.

Unter den Voraussetzungen $\varepsilon = 0$ und $d = \infty$ kann p einen endlichen Wert behalten; die Kurvengleichung geht alsdann über in

$$y^2 = 2px - x^2,$$

die Kurve wird daher ein Kreis, dessen Mitte F und dessen Halbmesser p ist.

§ 14. Besondere Gleichungen für die drei Kegelschnittslinien.

I. Die Parabel. Die Grundeigenschaft, aus welcher die Kegelschnitte zur Entstehung gelangten, geht, wenn $\varepsilon = 1$ gesetzt wird, in Gleichheit der Entfernungen jedes Parabelpunktes von Leitlinie und Brennpunkt über. Der Scheitel kommt hierbei in die Mitte zwischen Brennpunkt und Leitlinie zu liegen; es ist

1) $$p = d, \quad CA = AF = \tfrac{1}{2}p.$$

Wählen wir den Scheitel zum Koordinatenanfange, und die Symmetrieachse zur x-Achse, so ergibt sich als Gleichung der Parabel für rechtwinklige Koordinaten (§ 13, Nr. 8)

2) $$y^2 = 2px.$$

Nach dieser Gleichung wird y für jedes negative x imaginär, während dagegen allen positiven Werten von x reelle y zugehören.

Bezeichnet man zwei Parabelpunkte mit xy und x_1y_1, so folgt aus den Gleichungen

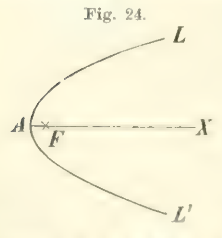
$$y^2 = 2px \text{ und } y_1^{\,2} = 2px_1$$

die Proportion:

$$x : x_1 = y_2 : y_1^{\,2},$$

d. h. die Abscissen sind den Quadraten der Ordinaten proportional. Die y wachsen also gleichzeitig mit den x, jedoch nur proportional mit deren Quadratwurzeln, also in einem schwächeren Verhältnisse. Durch Verbindung dieser Eigenschaft mit der früher schon bewiesenen Symmetrie aller Kegelschnitte in Beziehung auf die Achse erhält die Parabel die Gestalt der Kurve LAL' (Fig. 24), sodaß sie zu beiden Seiten der Achse AX ins Unendliche verläuft. A stellt hierbei den Scheitel und F den Brennpunkt dar.

Fig. 24.



Die Leitlinie ist in einem mit AF gleichen Abstande rückwärts von A senkrecht gegen die Achse gelegen.

II. Die Ellipse. Ist $\varepsilon < 1$, so ergibt sich für ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen x-Achse durch den Brennpunkt normal zu der Leitlinie gelegt ist und dessen y-Achse die auf der x-Achse enthaltene Kurvensehne halbiert, die Gleichung (§ 13, Nr. 9)

3) $$(1-\varepsilon^2)\,x^2 + y^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}.$$

Da diese Gleichung sowohl für x als y rein quadratisch ist, so hat die Ellipse in Beziehung auf beide Koordinatenachsen eine symmetrische Form, besteht demnach aus vier unter sich kongruenten Quadranten. Der Koordinatenanfang ist, wie hieraus leicht abgeleitet werden kann, Mittelpunkt der Ellipse, d. h. er besitzt die Eigenschaft, daß auf jeder hindurchgelegten Geraden zu beiden Seiten von ihm zwei Ellipsenpunkte in gleichem Abstande gelegen sind. Wird der Abstand des Scheitels A vom Mittelpunkte mit a bezeichnet, so ist (§ 13)

4) $$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2}.$$

Die Entfernung des Brennpunktes F vom Mittelpunkte führt den Namen lineare Exzentrizität, und wird mit c bezeichnet; dieselbe ergibt sich aus

$$c = a - AF = \frac{p}{1-\varepsilon^2} - \frac{p}{1+\varepsilon}$$

zu

5) $$c = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2} = \varepsilon a.$$

Wenn man den aus 4) folgenden Wert

$$1-\varepsilon^2 = \frac{p}{a}$$

in die Gleichung 3) einsetzt, so erhält man

$$\frac{p}{a}\cdot x^2 + y^2 = ap,$$

und hieraus entsteht, wenn man auf beiden Seiten durch ap dividiert,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{ap} = 1.$$

Bezeichnen wir endlich die mittlere Proportionale zwischen a und p mit b, oder gebrauchen die Beziehung:

6) $$b^2 = ap,$$

so erlangt die Ellipsengleichung die symmetrische Form:

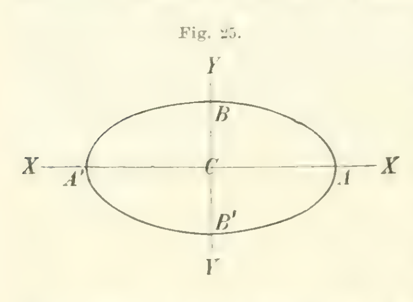
7) $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Hieraus folgen für reelle Werte der Koordinaten die Bedingungen:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 < 1, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^2 < 1,$$

wonach die Abscissen aller Ellipsenpunkte zwischen den Grenzen $-a$ und $+a$, die Ordinaten zwischen $-b$ und $+b$ enthalten sind. Beschränken wir uns bei der Formübereinstimmung der vier Quadranten auf denjenigen, in welchem x und y positiv sind, so gehören der Gleichung zufolge wachsenden x abnehmende y zu. Die Ellipse zeigt sicht daher als geschlossene Kurve in der Gestalt von Fig. 25. Für $y = 0$ und $x = 0$ finden sich $x = \pm a$ und $y = \pm b$ als Koordinaten der in den Achsen gelegenen Punkte A, A', B und B', der sogenannte Achsenscheitel. Die Strecken $A'A = 2a$, $B'B = 2b$ führen die Namen große und kleine Achse der Ellipse, die Konstanten a und b sind also die beiden Halbachsen. Zu der Berechtigung, zwischen den beiden Achsen einen Gegensatz der Größe festzustellen, gelangt man mittels der beiden Gleichungen 5) und 6), aus denen die Ungleichung

Fig. 25.



$$a > b > p$$

folgt. Nur wenn $\varepsilon = 0$, d. h. wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht, werden diese drei Werte unter sich gleich.

Zwischen den bei den vorhergehenden Gleichungen eingeführten beständigen Größen finden noch einige Beziehungen statt, die zur Herleitung von Eigenschaften der Ellipse benutzt werden können. Aus der Gleichung 5) erhält man

8) $$\varepsilon = \frac{c}{a}.$$

Das Verhältnis ε erhält hiermit die Eigenschaft, die lineare Exzentrizität als Bruchteil der großen Halbachse darzustellen, weshalb

man ihr auch den Namen numerische Exzentrizität verleiht. Zugleich zeigt sich aber mit Rücksicht auf die frühere Bedeutung dieser Konstanten, daß zwischen der großen Halbachse einer Ellipse und ihrer linearen Exzentrizität dasselbe Verhältnis stattfindet, in welchem die Abstände eines beliebigen Punktes dieser Kurve von der Leitlinie und dem zugeordneten Brennpunkte zueinander stehen.

Aus der Verbindung von 5) und 6) ergibt sich ferner:

$$b^2 = (1 - \varepsilon^2)\, a^2,$$

und hieraus mit Benutzung der Relation 8) nach geänderter Ordnung der Glieder:

9) $$a^2 = b^2 + c^2.$$

Die Gleichungen 8) und 9) können dazu dienen, für eine mit ihren Achsen gegebene Ellipse die Lage des Brennpunktes und der zugeordneten Leitlinie ausfindig zu machen. Nach Nr. 9) gibt sich nämlich zunächst die lineare Exzentrizität als Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks zu erkennen, in welchem die beiden Halbachsen die Hypotenuse und die andere Kathete darstellen; der Brennpunkt liegt daher in einer der großen Halbachse gleichen Entfernung von den Scheiteln der kleinen Achse. Beachtet man ferner, daß der Abstand eines Scheitels der kleinen Achse von der Leitlinie mit der Entfernung der letzteren Linie vom Mittelpunkte identisch ist, so folgt, wenn man die oben bei Nr. 8) gefundene Proportionalität auf diese Entfernung anwendet, daß der Abstand der Leitlinie vom Mittelpunkte, die große Halbachse und die lineare Exzentrizität eine stetige geometrische Proportion bilden. Nach diesen Bemerkungen gewährt es keine Schwierigkeit, Brennpunkt und Leitlinie zu konstruieren; man gelangt aber dabei, insofern jede dieser Konstruktionen zu beiden Seiten der kleinen Achse ausgeführt werden kann, zugleich zu der Wahrnehmung, daß zwei Leitlinien und zwei Brennpunkte vorhanden sein müssen, von denen jedesmal die auf derselben Seite vom Mittelpunkte aus gelegenen einander zugeordnet sind. In der Symmetrie der Ellipse gegen die kleine Achse findet diese Eigentümlichkeit ihre einfache Erklärung.

Das Vorhandensein zweier Brennpunkte gibt noch zu der folgenden Betrachtung Veranlassung. Sind $D_1 D_1$ und $D_2 D_2$ die beiden Leitlinien der Ellipse in Fig. 26, ferner F_1 und F_2 die zugeordneten

Brennpunkte, so gelten infolge der Eigenschaft, die wir der Entstehung der Kegelschnitte zu Grunde gelegt haben, die beiden

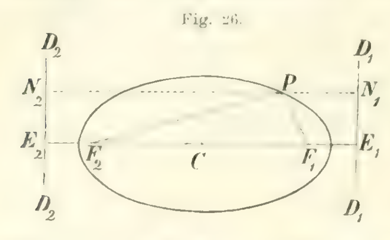


Fig. 26.

Gleichungen: $PF_1 = \varepsilon \cdot PN_1$, $F_2P = \varepsilon \cdot N_2P$, und es folgt hieraus durch Addition:

$$F_2P + PF_1 = \varepsilon \cdot E_2E_1.$$

Nach der zwischen der Entfernung einer Leitlinie vom Mittelpunkte, der großen Halbachse und der linearen Exzentrizität stattfindenden stetigen Proportion ist

$$CE_1 = a^2 : c, \quad \text{also} \quad E_2E_1 = 2a^2 : c = 2a : \varepsilon$$

und demnach

$$F_2P + PF_1 = 2a.$$

Geben wir dem Abstande eines Kegelschnittspunktes vom Brennpunkte den Namen **Brennstrahl**, wonach jedem Punkte einer Ellipse zwei Brennstrahlen zugehören, so führt das Vorhergehende zu dem Lehrsatze: **Für jeden Ellipsenpunkt ist die Summe der beiden Brennstrahlen unveränderlich gleich der großen Achse.**

III. **Die Hyperbel.** Für den Fall $\varepsilon > 1$ ergab sich in § 13 gegenüber dem Falle $\varepsilon < 1$ der wesentliche Unterschied, daß der **Mittelpunkt** — wenn wir diese Bezeichnung vorläufig auch auf den Koordinatenanfang in § 13, Nr. 10 anwenden — und der Brennpunkt F von der Leitlinie CC' getrennt werden, während bei der Ellipse F und der Mittelpunkt auf derselben Seite von CC' liegen. Bezeichnet man auch hier den Abstand des Scheitels A vom Mittelpunkte mit a, so hat man

$$10) \qquad a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Für die lineare Exzentrizität, den Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte, hat man

$$c = AF + \frac{p}{\varepsilon^2 - 1} = \frac{p}{\varepsilon + 1} + \frac{p}{\varepsilon^2 - 1};$$

hieraus folgt

$$11) \qquad c = \frac{\varepsilon p}{\varepsilon^2 - 1}.$$

Setzt man den aus 10) folgenden Wert

$$\varepsilon^2 - 1 = \frac{p}{a}$$

in die Gleichung der Kurve (§ 13, 10)

$$(\varepsilon^2 - 1)x^2 - y^2 = \frac{p^2}{\varepsilon^2 - 1};$$

so erhält man nach einfacher Umgestaltung

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{ap} = 1,$$

oder, wenn man wieder eine Hilfsgröße b einführt, für welche die Relation 6) gültig ist,

12) $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Aus der Form dieser Gleichung folgt vorerst wieder die Symmetrie der Hyperbel in Beziehung auf die x- und die y-Achse; es besteht also auch diese Kurve in Übereinstimmung mit der Ellipse aus vier unter sich kongruenten Quadranten, und der Koordinatenanfang verdient ebenso wie dort den Namen Mittelpunkt. Dabei ist aber die Gestalt eine durchaus verschiedene, wie sich mittels der Bedingungen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 \geq 1, \quad \left(\frac{y}{b}\right)^2 < \left(\frac{x}{a}\right)^2$$

ableiten läßt. Nach der ersten dieser Ungleichungen sind nämlich keine Hyperbelpunkte möglich, wenn

$$+a > x > -a,$$

also bei Übereinstimmung der Achsen und des Wertes a gerade innerhalb des Raumes, wo sich alle außerhalb der x-Achse gelegenen Ellipsenpunkte befinden; nur für $y = 0$ fallen beide Kurven zusammen und geben $x = \pm a$ für die Abscissen der Achsenscheitel. Die Hyperbel zerfällt hiermit in zwei voneinander getrennte, zu beiden Seiten der y-Achse gelegene Zweige. — Fassen wir ferner von den vier kongruenten Quadranten der Hyperbel denjenigen besonders ins Auge, innerhalb dessen beide Koordinaten positiv sind, so wachsen infolge der unter 12) gefundenen Gleichung die y gleichzeitig mit den x; damit ist aber gemäß der Ungleichung $\left(\frac{y}{b}\right)^2 < \left(\frac{x}{a}\right)^2$ immer

$$y < \frac{b}{a} x,$$

d. h. die Hyperbelordinaten sind bei übereinstimmenden x kleiner als die y einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden, in welcher die Richtungskonstante die Größe $\frac{b}{a}$ besitzt. Zur näheren Untersuchung der gegenseitigen Lage der Hyperbel und dieser Geraden bringen wir die Hyperbelgleichung 12) auf die Form:

$$\frac{b^2}{a^2} x^2 - y^2 = b^2$$

oder, indem wir linker Hand in Faktoren zerlegen:

$$\left(\frac{b}{a} x - y\right) \cdot \left(\frac{b}{a} x + y\right) = b^2.$$

Hieraus folgt für jeden Punkt der in Rede stehenden Hälfte des einen Hyperbelzweiges:

$$\frac{b}{a} x - y = \frac{a b^2}{b x + a y}.$$

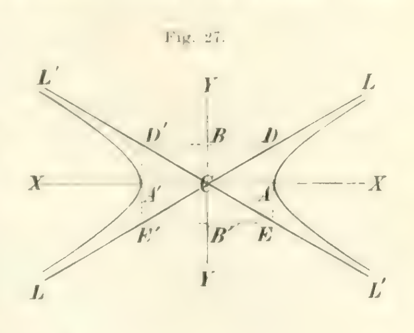
Der auf der rechten Seite befindliche Quotient gibt für den Überschuß von $\frac{b}{a} x$ über y, d. i. für den in einer Parallelen zur y-Achse gemessenen Abstand der Geraden und Hyperbel, Werte, die sich bei gleichzeitig wachsenden x und y fort und fort verkleinern; ja es kann, wenn man x hinreichend groß wählt und damit auch y entsprechend anwachsen läßt, dieser Unterschied kleiner als jede noch so kleine Größe werden, ohne doch jemals ganz in Null überzugehen. Eine Gerade, wie die eben untersuchte, an welche sich eine krumme Linie mehr und mehr anschmiegt, ohne doch je mit ihr vollständig zusammenzufallen, heißt eine Asymptote der Kurve; die Hyperbel besitzt mit Rücksicht auf ihre Symmetrie gegen die von uns gewählten Koordinatenachsen zwei Asymptoten, die sich im Mittelpunkte schneiden. Die Gleichungen dieser Asymptoten sind

13) $$y = + \frac{b}{a} x \quad \text{und} \quad y = - \frac{b}{a} x.$$

In Fig. 27 ist eine Hyperbel mit den Asymptoten LL und $L'L'$ dargestellt. Die geradlinige Strecke $A'A = 2a$ führt den Namen Hauptachse; die durch den Mittelpunkt senkrecht zur Hauptachse gelegte Gerade YY' wird die Nebenachse genannt.

Unter Länge der Nebenachse versteht man das Doppelte derjenigen Größe, die wir mit b bezeichnet haben. Diese Länge kann durch eine Gerade $DE = D'E'$ dargestellt werden, welche man durch einen Achsenscheitel parallel zur Nebenachse zwischen den Asymptoten legt. Nach den Gleichungen der Asymptoten ist nämlich, wenn wir $\angle DCA$ oder die Hälfte des sogenannten Asymptotenwinkels DCE mit γ bezeichnen,

Fig. 27.



$$14) \qquad \tan\gamma = \frac{b}{a},$$

und hieraus folgt:

$$DA = a \cdot \tan\gamma = b, \text{ also } DE = 2b.$$

Von DE oder $D'E'$ aus wird diese Länge leicht auf die Nebenachse nach BB' übertragen. Zu bemerken ist dabei, daß eine Ellipse mit denselben Halbachsen a und b in dem zu dieser Konstruktion benutzten Rechteck $DEE'D'$ völlig eingeschlossen sein würde.

Die Beziehung $a > b$, die bei der Ellipse Geltung fand, kommt für die Hyperbel in Wegfall. Es ergibt sich diese Wahrnehmung unmittelbar aus der Gleichung 10), wonach $a > p$, wenn $\varepsilon^2 < 2$, dagegen $a < p$, wenn $\varepsilon^2 > 2$. Da nun b immer die mittlere Proportionale zwischen a und p darstellt, so muß im ersteren Falle auch $a > b$ und im letzteren $a < b$ sein. Sobald $\varepsilon^2 = 2$, oder $\varepsilon = \sqrt{2}$, werden a, b und p unter sich gleich; die Hyperbel wird dann eine gleichseitige genannt. Aus Nr. 14) folgt ohne Schwierigkeit, daß der Asymptotenwinkel einer gleichseitigen Hyperbel ein rechter sein muß, während er für $a > b$ spitz und für $a < b$ stumpf ist.

Was die übrigen für die beständigen Größen der Ellipse aufgestellten Beziehungen betrifft, so zeigen zunächst die Gleichungen 10) und 11), daß die Formel

$$\varepsilon = \frac{c}{a}$$

auch für die Hyperbel Anwendung findet. Hiermit können aber

zugleich die daraus gezogenen Folgerungen übertragen werden. Nur Nr. 9) erleidet eine Änderung, indem die Verbindung von 6) und 10) zu dem Resultate

$$b^2 = (\varepsilon^2 - 1)\, a^2$$

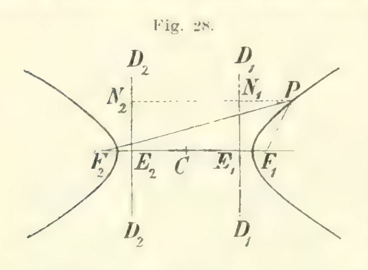
hinführt, woraus mit Einsetzung des Wertes von ε und geänderter Ordnung der Glieder die Relation

15) $$c^2 = a^2 + b^2$$

hergeleitet wird. $CD = CE$ in Fig. 29 ist daher gleich dem Abstande des Brennpunktes vom Mittelpunkte.

In gleicher Weise wie bei der Ellipse gelangen wir auch bei der Hyperbel zu zwei Leitlinien und zwei Brennpunkten, von denen wieder die auf derselben Seite der Nebenachse gelegenen einander zugeordnet sind. In Fig. 28 sind diese beiden Leitlinien durch D_1D_1 und D_2D_2 dargestellt mit den zugeordneten Brennpunkten F_1 und F_2. Bezeichnen wir mit ε die Charakteristik oder numerische Exzentrizität, so folgt aus einer ähnlichen Rechnung, wie die zu Fig. 26 bei Untersuchung der Brennstrahlen der Ellipse angestellte,

Fig. 28.



$$F_2P - F_1P = \varepsilon \cdot E_2E_1,$$

und hieraus:

$$F_2P - F_1P = 2a.$$

Dies gibt den zur Konstruktion der Hyperbel brauchbaren Lehrsatz: Für jeden Hyperbelpunkt ist der Unterschied der beiden Brennstrahlen unveränderlich gleich der Hauptachse.

Die zwischen der Ellipse und Hyperbel stattfindenden Analogien können analytisch auf die Zusammenstellung ihrer Gleichungen 7) und 12) zurückgeführt werden. Beide werden identisch, sobald man die elliptische Halbachse b in $b\sqrt{-1}$ übergehen läßt. Dadurch ist der Ausspruch gerechtfertigt: die Hyperbel kann als Ellipse mit imaginärer kleiner Achse aufgefaßt werden. Um endlich noch eine Vergleichung mit der Parabel zu erlangen, muß man für alle drei Kurven die im § 13 unter Nr. 6) benutzte Gleichung anwenden, weil in der Parabel kein Mittelpunkt vor-

handen ist. Bei Einführung der Beziehungen 1) und 10) entsteht hieraus das folgende System von Gleichungen:

16) $$\begin{cases} y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2, \\ y^2 = 2px \\ y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2, \end{cases}$$

die in der gewählten Reihenfolge zur Ellipse, Parabel und Hyperbel gehören. Ellipse und Hyperbel gehen nach dieser Zusammenstellung in die Parabel über, wenn man a unendlich werden läßt, während p endlich bleibt; hiernach kann die Parabel als eine Ellipse oder Hyperbel mit unendlich großer Achse betrachtet werden.

Wir schließen hieran noch einige Bemerkungen über Polargleichungen der Kegelschnitte. Nimmt man einen Brennpunkt F als Pol und zählt die Polwinkel von dem Scheitel A aus, der zwischen dem Pole und seiner Leitlinie CC' liegt, so erhält man aus $PF : PN = \varepsilon$ sofort

Fig. 29.

$$r = \varepsilon\,(d - r\cos\varphi),$$

und hieraus, wenn man $p = \varepsilon d$ beachtet,

17) $$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Zählt man die Polwinkel von der Verlängerung von AF aus, so erhält man statt 17) die Gleichung

18) $$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}.$$

Werden die Polwinkel dagegen von einer beliebigen Geraden des Brennpunktes F aus gezählt und gehört alsdann zu A der Polwinkel α, so erhält die Polargleichung eines Kegelschnitts für den Brennpunkt als Pol die allgemeine Form

19) $$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos(\varphi - \alpha)}.$$

Diese Gleichung enthält die drei Konstanten p, ε, α, zu deren Bestimmung drei voneinander unabhängige Bedingungen nötig sind; diese Bedingungen können z. B. die sein, daß der Kegelschnitt drei gegebene Punkte P_1, P_2, P_3 enthalten soll. Sind deren Polar-

koordinaten $r_1\varphi_1$, $r_2\varphi_2$, $r_3\varphi_3$, so hat man den Gleichungen zu genügen

$$20)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{p}\cos(\varphi_1 - \alpha),\\ \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{p}\cos(\varphi_2 - \alpha),\\ \frac{1}{r_3} &= \frac{1}{p} - \frac{\varepsilon}{p}\cos(\varphi_3 - \alpha). \end{aligned}$$

Aus ihnen folgen

$$21)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} &= \frac{\varepsilon}{p}\left(\cos(\varphi_2 - \alpha) - \cos(\varphi_1 - \alpha)\right),\\ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3} &= \frac{\varepsilon}{p}\left(\cos(\varphi_3 - \alpha) - \cos(\varphi_1 - \alpha)\right), \end{aligned}$$

hieraus ergibt sich durch Division

$$\frac{r_3(r_2 - r_1)}{r_2(r_3 - r_1)} = \frac{\cos(\varphi_2 - \alpha) - \cos(\varphi_1 - \alpha)}{\cos(\varphi_3 - \alpha) - \cos(\varphi_1 - \alpha)}.$$

Da nun bekanntlich

$$\cos\lambda - \cos\mu = 2\sin\frac{\mu + \lambda}{2}\cdot\sin\frac{\mu - \lambda}{2},$$

so erhält man schließlich

$$22)\qquad \frac{\sin\left(\frac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_3) - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) - \alpha\right)} = \frac{r_3(r_2 - r_1)}{r_2(r_3 - r_1)}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_3 - \varphi_1)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

Von den unbekannten Winkeln

$$\tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \varphi_3) - \alpha \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_3) - \alpha$$

kennt man den Unterschied $\frac{1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1)$ und nach 22) das Sinusverhältnis, und findet hieraus die Winkel selbst und damit die Unbekannte α nach bekannten trigonometrischen Regeln. Führt man das gefundene α in eine der Gleichungen 21) ein, so folgt $\varepsilon : p$, und durch weitere Einsetzung in eine der Gleichungen 20) findet man p.

Soll der Kegelschnitt eine Parabel sein, so hat ε den Wert 1; alsdann genügen zwei Punkte; zur Bestimmung der Unbekannten p und α hat man dann die Gleichungen

$$23)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{r_1} &= \frac{1}{p}\left(1 - \cos(\varphi_1 - \alpha)\right) = \frac{2}{p}\sin^2\frac{1}{2}(\varphi_1 - \alpha),\\ \frac{1}{r_2} &= \frac{1}{p}\left(1 - \cos(\varphi_2 - \alpha)\right) = \frac{2}{p}\sin^2\frac{1}{2}(\varphi_2 - \alpha), \end{aligned}$$

aus denen durch Division folgt

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi_1 - \alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\varphi_2 - \alpha)} = \sqrt{\frac{r_2}{r_1}},$$

wodurch α bestimmt ist.

Gehören die Kegelschnittspunkte P und P' zu den Polwinkeln φ und $180^0 + \varphi$, liegt also P' auf der Verlängerung von PF, so ist

24) $$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}, \quad r' = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi};$$

hieraus folgt sofort

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) = \frac{1}{p}.$$

Dies gibt den Satz: *Jede durch einen Brennpunkt eines Kegelschnitts gelegte Sehne wird in diesem Punkte so geteilt, daß das harmonische Mittel ihrer beiden Abschnitte konstant, nämlich dem Halbparameter gleich ist.*

Der Punkt $\mathfrak{P}$, der die Strecke $P'P$ außen in dem Verhältnisse $\lambda = r' : r$ teilt, hat nach § 3 Nr. 11 die Abscisse

$$\mathfrak{x} = \frac{x' - \lambda x}{1 - \lambda} = \frac{rx' - r'x}{r - r'}.$$

Setzt man hier

$$x = r\cos\varphi, \quad x' = -r'\cos\varphi,$$

so erhält man

$$\mathfrak{x} = \frac{2rr'\cos\varphi}{r' - r}.$$

Aus 24) folgt

$$r - r' = \frac{2p\varepsilon\cos\varphi}{1 - \varepsilon^2\cos^2\varphi} = \frac{2\varepsilon rr'\cos\varphi}{p};$$

daher ergibt sich

$$\mathfrak{x} = -\frac{p}{\varepsilon} = -d.$$

Folglich liegt $\mathfrak{P}$ auf der Leitlinie; wir haben damit den Satz gefunden: *Auf jedem Brennstrahle eines Kegelschnitts sind die beiden auf ihm enthaltenen Punkte der Kurve dem Brennpunkte und dem auf der zugehörigen Leitlinie liegenden Punkte harmonisch zugeordnet.*

Von dem allgemeinen Überblicke der drei Hauptformen der Kegelschnitte wenden wir uns in den folgenden Kapiteln zur analytischen Untersuchung der einzelnen Kurven. Wir gehen dabei von der Parabel aus, die insofern für die einfachste dieser drei Linien anzusehen ist, als ihre Gleichung nur von einer Konstanten abhängig gemacht werden kann, während für die Ellipse und Hyperbel die Einführung zweier beständiger Größen nötig wird.

Fünftes Kapitel.

Die Parabel.

§ 15. Die Gleichung: $y^2 = 2px$.

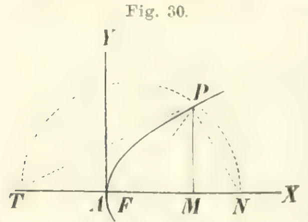
Nachdem wir im vorigen Paragraphen unter I. aus der Gleichung

1) $$y^2 = 2px$$

bereits die Hauptumrisse der Gestalt für die dadurch repräsentierte Kurve — die Parabel — hergeleitet haben, wollen wir jetzt die Gleichung anwenden, um aus ihr die Mittel zu ihrer geometrischen Darstellung zu gewinnen.

I. Wird Nr. 1) in eine stetige Proportion aufgelöst, so erscheint y als mittlere Proportionale zwischen $2p$ und x, oder auch zwischen p und $2x$. Jede Konstruktion, durch welche die mittlere Proportionale zweier Strecken gefunden wird, ist daher brauchbar, um beliebig viele Punkte einer Parabel zu erlangen, deren Achse, Scheitel und Parameter gegeben sind. Trägt man z. B. aus dem Scheitel A (Fig. 30) die Abscisse AM auf der Achse rückwärts nach AT, macht $MN = p$ und konstruiert über dem Durchmesser $TN = 2x + p$ einen Halbkreis, so wird die Ordinate MP in einem Parabelpunkte P geschnitten, weil nach einer bekannten Eigenschaft des rechtwinkligen Dreiecks MP die mittlere Proportionale zwischen TM und MN d. i. zwischen $2x$ und p bildet. Die besondere Auftragung der Strecke MN kann hierbei noch erspart werden, wenn man beachtet, daß der Mittelpunkt des beschriebenen Halbkreises in den Brennpunkt F der Parabel fällt. Der Konstruktion zufolge ist nämlich

Fig. 30.



$$\begin{aligned} TF &= TA + AF = x + \tfrac{1}{2}p \\ &= \tfrac{1}{2}(2x + p) \\ &= \tfrac{1}{2}TN. \end{aligned}$$

Das angegebene Verfahren empfiehlt sich namentlich insofern, als sich später zeigen wird, daß dabei gleichzeitig in TP und PN die Tangente und Normale des Parabelpunktes T zum Vorschein kommen.

II. Liegt ein Punkt auf zwei Geraden, für welche die Gleichungen

2) $$y = A_1 x,$$

3) $$y = \frac{2p}{A_1}$$

gegeben sind, so gilt für seine Koordinaten auch die aus Multiplikation von 2) und 3) entstehende Gleichung:

$$y^2 = 2px;$$

er ist also ein Parabelpunkt; hierbei gehört, da A_1 aus der Rechnung fällt, die Gleichung 2) einer in beliebiger Richtung durch den Koordinatenanfang gelegten Geraden an, Nr. 3) dagegen einer Parallelen zur x-Achse durch denjenigen Punkt einer im Parabelscheitel auf der ersteren Geraden errichteten Senkrechten, für welchen $x = -2p$ ist. Letzteres folgt aus der Bemerkung, daß die Gleichung 3) auch in der Form

$$y = -\frac{1}{A_1}(-2p)$$

geschrieben werden kann. Dies führt zur folgenden Konstruktion:

Im Abstande $AC = 2p$ vom Scheitel (Fig. 31) errichte man die feste Gerade CD senkrecht zur Achse. Wird dann durch den Scheitel A die Gerade AP in beliebiger Richtung gelegt, hierauf das Perpendikel AN errichtet und zuletzt NP parallel zur Achse AX gezogen, so liegt der Punkt P auf der Parabel.

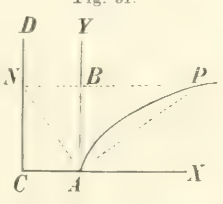


Fig. 31.

III. Da im § 14 die Gleichung der Parabel aus der Eigenschaft abgeleitet wurde, daß jeder Parabelpunkt gleiche Entfernung von dem Brennpunkte und der Leitlinie besitzt, so kann selbstverständlich auch von jener

Gleichung auf diese Eigenschaft zurückgegangen werden. Man gelangt hierzu, wenn man die Gleichung 1) in der Form

$$y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{p}{2}\right)^2$$

schreibt, woraus dann das Resultat

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

hervorgeht. Der linker Hand befindliche Wert gibt das Quadrat der Entfernung des Punktes xy von einem festen Punkte mit den Koordinaten $\frac{p}{2}$ und 0, d. i. vom Brennpunkte; rechter Hand befindet sich das Quadrat der Entfernung desselben Punktes von einer um die Strecke $\frac{p}{2}$ rückwärts von der y-Achse gelegenen Geraden, d. i. von der Leitlinie. Die auf die Gleichheit dieser Entfernungen sich gründende Konstruktion von Parabelpunkten kann der Selbstübung des Lesers überlassen bleiben.

Werden die im vorigen angewendeten Umformungen auf den Fall übertragen, wo die Entfernungen eines Punktes von Brennpunkt und Leitlinie ungleich sind, er also nicht auf der Parabel gelegen ist, so gehört von den hierbei möglichen zwei Fällen

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \gtrless \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

der erstere offenbar einem Punkte an, welcher außerhalb des auf der konkaven Seite der Parabel befindlichen Teils der Ebene gelegen ist, weil die Entfernung eines solchen Punktes vom Brennpunkte bei gleicher Abscisse, also auch gleicher Entfernung von der Leitlinie größer als der Abstand des entsprechenden Parabelpunktes vom Brennpunkte sein muß. Der zweite Fall bezieht sich in gleicher Weise auf einen innerhalb der Parabel gelegenen Punkt. Hieraus folgt, daß durch die Ungleichung

4) $$y^2 > 2px$$

diejenigen Punkte bezeichnet werden, welche außerhalb der Parabelfläche liegen*), während die Ungleichung

*) Für den Fall eines negativen x, welchem imaginäre Parabelpunkte entsprechen, ist die Gültigkeit der Ungleichung 4) selbstverständlich.

5) $$y^2 > 2px$$

für Punkte innerhalb der Parabelfläche Geltung besitzt.

Die Beziehung der Lage von Parabelpunkten auf den Brennpunkt und die zugehörige Leitlinie führt noch zu der Frage, ob vielleicht, wie bei Ellipse und Hyperbel, außer dem bei der Konstruktion der Linie benutzten Brennpunkte noch ein zweiter vorhanden ist. Wir gehen bei Beantwortung dieser Frage von der bei Entstehung der Kegelschnitte zu Grunde gelegten Begriffsbestimmung aus, daß wir unter Brennpunkt einer Kurve einen in ihrer Ebene gelegenen Punkt verstehen, der im Vereine mit einer zugeordneten Geraden (Leitlinie) die Eigenschaft besitzt, daß die Entfernungen jedes Kurvenpunktes von diesem festen Punkte und der zugehörigen Leitlinie in einem konstanten Verhältnisse stehen. Bezeichnen wir nun die Koordinaten dieses Brennpunktes mit ξ und η und setzen für die Gleichung der Leitlinie

$$y = Ax + b,$$

so muß nach der angegebenen Fundamentaleigenschaft die Gleichung der Kurve die Form

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = \varepsilon^2 \left(\frac{y - Ax - b}{\sqrt{1+A^2}}\right)^2$$

annehmen können, wobei ε einen unveränderlichen Faktor ausdrückt [vgl. § 3 Nr. 1) und § 6 Nr. 11)]. Werden hierin statt A, b und ε zur Abkürzung drei neue Konstanten α, β, γ eingeführt, für welche die Relationen

$$\alpha = -\frac{A\varepsilon}{\sqrt{1+A^2}}, \quad \beta = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+A^2}}, \quad \gamma = -\frac{b\varepsilon}{\sqrt{1+A^2}}$$

gültig sind, so erlangt die Kurve, welche den Brennpunkt $\xi\eta$ besitzt, die Gleichung:

6) $$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 \text{ *)}$$

oder, wenn man die darin angedeuteten Operationen ausführt und nach Potenzen der Koordinaten x und y ordnet,

7) $$\begin{cases} (1-\alpha^2)x^2 + (1-\beta^2)y^2 - 2\alpha\beta xy - 2(\xi + \alpha\gamma)x \\ \qquad - 2(\eta + \beta\gamma)y + \xi^2 + \eta^2 - \gamma^2 = 0. \end{cases}$$

*) Die Gleichung 6), in welcher α, β, γ beliebige Konstanten darstellen, läßt die Deutung zu, daß der Brennstrahl eine lineare Funktion der Koordinaten x und y darzustellen habe.

Die Form dieser Gleichung führt uns zu der aus der Entstehung der Kegelschnitte bereits ersichtlichen Bemerkung zurück, daß Brennpunkte nur bei Linien zweiten Grades vorkommen können. Soll nun eine solche Linie zur Parabel werden, so muß Nr. 7) in die Gleichung

$$y^2 = 2px$$

übergehen. Hierzu sind die folgenden Bedingungsgleichungen nötig und ausreichend:

$$1 - \alpha^2 = 0, \quad \alpha\beta = 0,$$

$$\eta + \beta\gamma = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 - \gamma^2 = 0,$$

welche, da mit Rücksicht auf die beiden ersten dieser Resultate

$$\beta = 0$$

sein muß, sich auf

$$\alpha^2 = 1, \quad \eta = 0 \quad \text{und} \quad \xi^2 = \gamma^2$$

reduzieren. Die Bedingung $\eta = 0$ zeigt, daß Brennpunkte nur in der Achse der Parabel gelegen sein können. — Mit Einsetzung der vorhergehenden Werte entsteht aus Nr. 7)

$$y^2 = 2(\xi + \alpha\gamma)x$$

als Gleichung einer Parabel, für welche

$$\xi + \alpha\gamma = p.$$

Wird diese letzte Bedingung mit den oben aufgestellten vereinigt, so gelangt man nach Elimination von α und γ zu dem Resultate:

$$p(p - 2\xi) = 0.$$

Dieser Gleichung kann aber in einer Parabel, deren Halbparameter p von Null verschieden sein muß, nur genügt werden, wenn

$$\xi = \frac{p}{2}.$$

Die Parabel besitzt demnach nur einen Brennpunkt, nämlich den auf der Achse im Abstande $\frac{1}{2}p$ vom Scheitel gelegenen.

§ 16. Die Parabel und die Gerade.

Legen wir den folgenden Untersuchungen die Gleichung der Parabel wieder in der Form

1) $$y^2 = 2px$$

zu Grunde, so ist dabei in Übereinstimmung mit den vorhergehenden Betrachtungen ein rechtwinkliges Koordinatensystem vorausgesetzt, dessen x-Achse mit der Parabelachse zusammenfällt und dessen Anfangspunkt im Scheitel gelegen ist. Was die hierbei angenommene y-Achse betrifft, so ergibt sich, wenn wir ihre Gleichung

$$x = 0$$

mit der oben für die Parabel gegebenen verbinden, die Gleichung

$$y^2 = 0,$$

welche zwei gleiche Wurzeln $y = 0$ besitzt. Da hiernach die y-Achse zwei zusammenfallende Punkte mit der Parabel gemein hat, so ist sie als Tangente zu bezeichnen; man kann ihr den Namen Scheiteltangente geben, weil sie die Parabel im Scheitel berührt.

Gehen wir nach dieser Vorbemerkung zu den möglichen Lagen einer beliebigen Geraden gegen die Parabel über, so soll erstere durch die Gleichung

2) $$y = Ax + b$$

gegeben sein. Für etwa vorhandene gemeinschaftliche Punkte beider Linien gelten dann die beiden Gleichungen 1) und 2), aus denen, wenn man x entfernt, das in beiden Gleichungen nur in der ersten Potenz auftritt, für die Ordinaten dieser Punkte die Gleichung zweiten Grades

3) $$Ay^2 - 2py + 2bp = 0$$

entsteht. Die zugehörigen x finden sich ebensowohl aus Nr. 1) als aus 2).

Die Entfernung von x kann nicht stattfinden, wenn $A = 0$ ist, die Gerade also die Richtung der Parabelachse hat. Setzt man alsdann $y = b$ in 1) ein, so erhält man

$$b^2 = 2px,$$

also nur eine Wurzel für x. Daher folgt, daß jede der Parabelachse parallele Gerade die Parabel nur in einem Punkte schneidet.*) Ist dagegen A von Null verschieden, so bewendet

*) Bringt man das aus Nr. 3) folgende Resultat

$$y = \frac{p \pm \sqrt{p(p - 2Ab)}}{A}$$

es bei 3) und es ist die Beschaffenheit der Wurzeln aus der Diskriminante

$$\Delta = 2Abp - p^2$$

abzuleiten, welche auch in der Form

$$\Delta = 2p\left(Ab - \frac{p}{2}\right)$$

geschrieben werden kann. Da hierin der Parameter $2p$ immer einen entschieden positiven Wert besitzt, so hängt das Vorzeichen dieser Diskriminante, also auch die Beschaffenheit der Wurzeln und hiermit die gegenseitige Lage der Parabel und der Geraden von dem Vorzeichen der Differenz

$$Ab - \frac{p}{2}$$

ab. Je nachdem diese Differenz positiv, gleich Null oder negativ ist, haben die beiden Linien zwei verschiedene, einen oder besser gesagt zwei zusammenfallende Punkte, oder endlich keinen Punkt gemein. Im ersteren Falle ist also die Gerade Sekante, im zweiten Tangente, im dritten liegt sie mit allen ihren Punkten außerhalb der Parabel.

Zur geometrischen Deutung dieser Merkmale projiziere man den Brennpunkt rechtwinklig auf die Gerade. Die Gleichung der Projizierenden lautet nach Nr. 6) im § 6:

$$y = -\frac{1}{A}\left(x - \frac{p}{2}\right),$$

und man erhält hieraus in Verbindung mit der obigen Gleichung Nr. 2) für die Abscisse der Brennpunktsprojektion:

$$x = \left(\frac{p}{2} - Ab\right) : (1 + A^2).$$

Da der Divisor dieses Wertes stets positiv ist, so haben die Diskriminante $Ab - \frac{1}{2}p$ und das gefundene x ungleiche Vorzeichen.

---

durch Multiplikationen von Zähler und Nenner mit $p \mp \sqrt{p(p - 2Ab)}$ und nachfolgende Hebung von A in die Form

$$y = \frac{2bp}{p \mp \sqrt{p(p - 2Ab)}},$$

so umfaßt es auch den Fall $A = 0$, und es fällt dabei, da die Wurzel mit dem obern Vorzeichen unendlich wird, der eine Durchschnittspunkt in die Unendlichkeit. Diese Bemerkung ist für die Vergleichung von Parabel und Ellipse nicht ohne Wichtigkeit.

und es ergibt sich hieraus das folgende Merkmal: Eine Gerade ist Tangente der Parabel, sobald die Projektion des Brennpunktes auf die Gerade in der Scheiteltangente liegt. Bei jeder anderen Lage ist die Gerade Sekante, oder hat keinen Punkt mit der Parabel gemein, je nachdem die Brennpunktsprojektion von der Scheiteltangente aus auf die Seite der Parabel oder die entgegengesetzte Seite fällt. Besonders wichtig ist von diesen drei Fällen der auf Tangenten bezügliche, indem er dazu benutzt werden kann, um bei gegebenem Brennpunkte alle auf Parabeltangenten bezüglichen Aufgaben durch Konstruktion zu lösen.

Wir wenden uns zur analytischen Behandlung solcher Aufgaben, wobei wir das Kennzeichen festzuhalten haben, daß jede Gerade, deren Konstanten die Bedingung

$$\frac{p}{2} - Ab = 0$$

oder

4) $$p = 2Ab$$

erfüllen, eine Tangente darstellt.

Aus Nr. 4) folgt zunächst, wenn die Richtung einer zu ziehenden Tangente gegeben ist,

$$b = \frac{p}{2A}$$

und hieraus für die Gleichung der Berührungslinie selbst:

5) $$y = Ax + \frac{p}{2A}.$$

Dies zeigt, daß in gegebener Richtung stets nur eine Parabeltangente gelegt werden kann, und führt bei Konstruktion der Größe $\frac{p}{2A}$ oder $\frac{p}{2} : A$ auf das oben für Tangenten festgesetzte Merkmal zurück. Auszuschließen ist jedoch der Fall $A = 0$, in welchem die Tangente in die Unendlichkeit fällt.

Soll ferner eine Gerade $y = Ax + b$ die Parabel berühren und dabei durch einen festen Punkt $x_1 y_1$ hindurchgehen, so hat man zur Bestimmung der beständigen Größen A und b die beiden Bedingungen:

$$p = 2Ab, \quad y_1 = Ax_1 + b.$$

Hieraus entsteht, wenn man b entfernt, zur Berechnung der

Größe A, für welche die Bedingung $A = 0$ bereits ausgeschlossen ist, die Gleichung:

6) $$2A^2x_1 - 2Ay_1 + p = 0.$$

Die zugehörigen b ergeben sich aus:

7) $$b = \frac{p}{2A}.$$

Mit Rücksicht auf die quadratische Form von Nr. 6) folgt, daß durch den Punkt $x_1 y_1$ zwei Tangenten, eine oder keine möglich sind, je nachdem

$$y_1^2 \gtreqless 2px_1,$$

was mit Rücksicht auf die Gleichung der Parabel in Verbindung mit den Ungleichungen 4) und 5) des vorigen Paragraphen darauf hinauskommt, ob der gegebene Punkt außerhalb der Parabelfläche, auf der Peripherie oder innerhalb gelegen ist.

Soll der Punkt $x_1 y_1$ Berührungspunkt sein, so findet die Gleichung

8) $$y_1^2 = 2px_1$$

statt. Wird nun Nr. 6) mit p multipliziert, so entsteht mit Benutzung von 8):

$$A^2y_1^2 - 2Apy_1 + p^2 = 0,$$

und hieraus folgt:

9) $$A = \frac{p}{y_1}.$$

Für die Konstante b ergibt sich aus Nr. 7), wenn man den gefundenen Wert von A einsetzt,

10) $$b = \frac{y_1}{2},$$

und man erhält durch Substitution dieser Werte von A und b in die Gleichung der Geraden bei Beachtung von Nr. 8) als Gleichung einer Tangente mit dem Berührungspunkte $x_1 y_1$:

11) $$y_1 y = p\,(x + x_1).$$

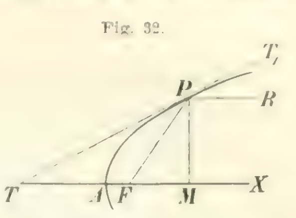
Setzt man hierin $y = 0$, so folgt für die Abscisse a desjenigen Punktes, in welchem die Tangente die Parabelachse schneidet,

12) $$a = -x_1.$$

Dieser letzte Wert ist besonders geeignet, um bei gegebenem Berührungspunkte die Tangente zu konstruieren.

Soll z. B. die Parabel im Punkte P (Fig. 32) von einer Geraden berührt werden, so hat man nur, wenn MP die Ordinate dieses Punktes darstellt, $TA = AM$ zu machen und TP zu ziehen, um die Tangente zu erhalten. Nach den zu Fig. 30 gemachten Bemerkungen ist hierbei $TF = FP$, folglich sind auch die Winkel PTF und TPF einander gleich. Dies gibt den Satz: **Die Tangente an einem Parabelpunkte bildet mit der Parabelachse denselben Winkel, wie mit dem Brennstrahle jenes Punktes***). Legt man ferner PR parallel zur Achse, so sind nach dem Vorigen auch die Winkel T_1PR und TPF einander gleich. Hierauf beruhen die physikalischen Eigenschaften des Parabelbrennpunktes**.)

Fig. 32.



Ist $x_1 y_1$ ein außerhalb der Parabel gelegener Punkt, von welchem aus zwei Tangenten gezogen werden können, so läßt sich leicht nachweisen, daß für diesen Fall Nr. 11) die Gleichung der **Berührungssehne** darstellt. Bezeichnet man nämlich die Koordinaten eines der beiden Berührungspunkte mit x und y, so findet, da x_1 und y_1 einem Punkte angehören, welcher in der durch xy gehenden Tangente gelegen ist, zwischen x, x_1, y und y_1 nach 11) die Beziehung

13) $$y_1 y = p(x + x_1)$$

statt, wobei nur x und x_1, y und y_1 ihre Bedeutungen vertauscht haben. Ganz gleiches gilt auch für den zweiten Berührungspunkt; folglich ist die Gleichung 13), welche als Gleichung ersten Grades zweien mit xy bezeichneten Punkten Genüge leistet, der Verbindungsgeraden dieser beiden Punkte angehörig. Hiernach ist es leicht, die Berührungssehne zu konstruieren. Man findet, wie bei der Tangente, für die Abscisse ihres Durchschnittspunktes mit der Parabelachse:

$$a = -x_1 .$$

*) Dieses Resultat kann auch durch Vergleichung der Richtungskonstanten der Geraden FP und TP bestätigt werden.

**) In einem Hohlspiegel, dessen spiegelnde Fläche durch Rotation einer Parabel um ihre Achse gebildet ist, werden Licht- oder Wärmestrahlen, die parallel zur Achse einfallen, im Brennpunkte vereinigt. Umgekehrt werden solche Strahlen, wenn sie vom Brennpunkte ausgehen, in einer mit der Achse parallelen Richtung zurückgeworfen.

wodurch einer ihrer Punkte bestimmt ist; ferner für ihre Richtungskonstante:

$$A = \frac{p}{y_1},$$

d. h. mit Rücksicht auf Nr. 9): sie läuft mit der Tangente eines Parabelpunktes parallel, dessen Ordinate mit y_1 gleich ist.

Normalen der Parabel. Eine im Parabelpunkte $x_1 y_1$ errichtete Normale hat, weil sie auf der Tangente dieses Punktes senkrecht steht, nach Nr. 6) im § 6 die Gleichungsform:

$$y - y_1 = -\frac{1}{A}(x - x_1),$$

wobei A die der Tangente zugehörige Richtungskonstante bezeichnet. Mit Hilfe des in Nr. 9) gegebenen Wertes von A erhält man hieraus als **Gleichung der Normale**:

14) $$y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Setzt man hierin $y = 0$, so ergibt sich für die Abscisse ξ des Durchschnittspunktes der Normale und Parabelachse das Resultat:

15) $$\xi - x_1 = p.$$

Die Differenz $\xi - x_1$, d. i. die auf der x-Achse zwischen dem Fußpunkte der Ordinate und dem Einfallspunkte der Normale enthaltene Strecke führt den Namen Subnormale*). Mit Einführung dieser Benennung entsteht aus Nr. 15) der Satz: **Die Subnormale jedes Parabelpunktes ist beständig gleich dem Halbparameter.**

Aus der Gleichheit der Winkel, welche eine Parabeltangente mit Brennstrahl und Achse einschließt, kann noch auf einfache Weise das Resultat hergeleitet werden, daß die gleiche Eigenschaft auch für die Normale Geltung besitzt.

§ 17. Fortsetzung.

Durchmesser der Parabel. Wenn man die in Nr. 3) des vorhergehenden Paragraphen für die Ordinaten der gemeinschaft-

*) In ähnlicher Weise wird die zwischen dem Einfallspunkte der Tangente und dem Fußpunkte der Ordinate auf der x-Achse gelegene Strecke Subtangente genannt. Ihre Größe ist in der Parabel nach Nr. 12) gleich der doppelten Abscisse des Berührungspunktes.

lichen Punkte einer Parabel und einer Geraden aufgestellte Gleichung durch A dividiert, so kann diese Gleichung auf die Form

$$1) \qquad y^2 - 2\frac{p}{A}y + \frac{2bp}{A} = 0$$

gebracht werden unter der Voraussetzung, daß A von Null verschieden ist, d. h. daß die Gerade nicht mit der Parabelachse parallel läuft. Der ausgeschlossene Fall ist also der, wo die Gerade **nur einen Punkt mit der Parabel gemein haben kann.**

Angenommen nun, die Gerade schneide die Parabel in zwei Punkten, so wollen wir mit y_1 und y_2 die Ordinaten dieser beiden Durchschnittspunkte bezeichnen. Dann folgt aus 1) nach dem algebraischen Lehrsatze über die Summe der Wurzeln einer quadratischen Gleichung:

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{p}{A}.$$

Der linker Hand befindliche Wert drückt hier die Ordinate des Mittelpunktes der auf der Geraden abgeschnittenen Parabelsehne aus [vergl. § 3 Nr. 10)]. Bezeichnen wir diese Ordinate mit y, so gilt für die Sehnenmitte die Gleichung:

$$2) \qquad y = \frac{p}{A}.$$

Da diese Gleichung die Ordinate der Sehnenmitte nur von der Richtung der Sehne (mittels der Konstanten A) abhängig macht, so gilt sie zugleich für die Mittelpunkte aller mit der untersuchten Geraden parallelen Sehnen und gibt als geometrischen Ort dieser Punkte eine zur Parabelachse parallele Gerade. So entsteht der Lehrsatz: I n d e r P a r a b e l l i e g e n d i e M i t t e n p a r a l l e l e r S e h n e n i n e i n e r z u r A c h s e p a r a l l e l e n G e r a d e n, oder, insofern man einer Linie den Namen D u r c h m e s s e r einer Kurve gibt, wenn sie die Eigenschaft besitzt, ein System paralleler Sehnen zu halbieren: A l l e P a r a b e l d u r c h m e s s e r l a u f e n m i t d e r A c h s e p a r a l l e l. Der Abstand eines solchen Durchmessers von der Achse ergibt sich, wenn die Richtung der Sehnen gegeben ist, aus der Gleichung 2). Durch Umkehrung des Satzes folgt hieraus, daß eine in der Entfernung x gezogene Parallele zur Parabelachse den Durchmesser aller derjenigen Sehnen darstellt, welche die Richtungskonstante

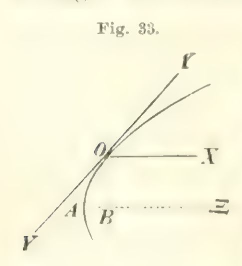
$$3) \qquad A = \frac{p}{y}$$

besitzen. Die Übereinstimmung dieser letzten Gleichung mit Nr. 9) des vorhergehenden Paragraphen zeigt zugleich, daß die zugehörigen Sehnen gleiche Richtung mit derjenigen Geraden haben, welche die Parabel in ihrem Durchschnittspunkte mit dem Durchmesser berührt.

Die soeben gefundenen Eigenschaften gewähren die Mittel, in einer gegebenen Parabel die Lage der Achse, des Brennpunktes und somit auch der Leitlinie ausfindig zu machen. Mittels zweier paralleler Sehnen kann man nämlich einen Durchmesser und eine Tangente konstruieren; mit Hilfe der letzteren erhält man aber eine den Brennpunkt enthaltende Gerade durch Anwendung des Satzes, daß jede Parabeltangente gleiche Winkel mit dem Brennstrahle ihres Berührungspunktes und einer Parallelen zur Achse einschließt. Wird dieselbe Konstruktion an einem zweiten Paare paralleler Sehnen wiederholt, so läßt sich hierdurch der Brennpunkt und aus diesem die Achse und die Direktrix vollständig bestimmen. Übrigens findet man auch die Achse bereits mittels eines Durchmessers ohne Vermittelung einer Tangente, wenn man beachtet, daß eine zu diesem Durchmesser senkrecht gelegte Sehne auch senkrecht zur Achse liegt und von derselben halbiert wird.

Ein Parabeldurchmesser und die Tangente des in ihm gelegenen Parabelpunktes bilden ein System zusammengehöriger Linien, für welches die Parabelachse und Scheiteltangente den speziellen Fall der senkrechten Lage beider Geraden darstellen. Wählt man daher zwei Gerade der erstgenannten Art zur x- und y-Achse eines schiefwinkligen Koordinatensystems, so muß die für dieses System geltende Gleichung der Parabel die auf das bisher benutzte rechtwinklige System bezügliche Gleichung als besonderen Fall in sich schließen. Mit Anwendung der im § 4 aufgestellten Änderungsformeln kann man rückwärts von der letzteren zu jener allgemeineren gelangen. Wir wollen hierzu den Koordinatenwinkel XOY in Fig. 33 mit ω bezeichnen und die auf die Parabelachse $A\Xi$ und den Scheitel bezogenen rechtwinkligen Koordinaten des neuen Anfangspunktes $AB = a$ und $BO = b$ setzen. Dann folgt aus Nr. 3):

Fig. 33.



$$4) \qquad \tan\omega = \frac{p}{b}$$

und aus der Parabelgleichung:

5) $$b^2 = 2pa.$$

Nach Nr. 4) im § 4 ist beim Übergange vom ursprünglichen bei allen früheren Untersuchungen angewendeten Koordinatensysteme zu dem neuen das frühere x mit

$$a + x + y \cos \omega$$

und das frühere y mit

$$b + y \sin \omega$$

zu vertauschen, da nämlich die im § 4 angewendeten Winkel α und β hier die Werte 0 und ω besitzen. Die Parabelgleichung wird hierdurch in die für das neue System geltende Gleichung

$$(b + y \sin \omega)^2 = 2p(a + x + y \cos \omega)$$

verwandelt, welche nach Ausführung der darin angedeuteten Rechnungen und geänderter Ordnung der Glieder in die Form

$$y^2 \sin^2 \omega = 2px - 2b\left(\frac{p}{b} - \tan \omega\right) y \cos \omega + (2pa - b^2)$$

übergeführt werden kann. Bei Beachtung von Nr. 4) und 5) folgt hieraus:

$$y^2 \sin^2 \omega = 2px$$

oder, wenn man beiderseitig durch $\sin^2 \omega$ dividiert:

6) $$y^2 = 2\frac{p}{\sin^2 \omega} x.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit der bei allen vorhergehenden Untersuchungen benutzten vollständig überein, nur daß die Konstante p in die neue beständige Größe $\frac{p}{\sin^2 \omega}$ übergegangen ist. Alle auf die Form jener Gleichung gestützten Untersuchungen der beiden vorhergehenden Paragraphen können daher, soweit sie von der rechtwinkligen Lage des Koordinatensystems unabhängig sind, auf das neue System übertragen werden.

Wiederholt man z. B., um nur einen hierher gehörigen Fall auszuheben, der eine konstruktive Anwendung zuläßt, die auf Tangenten bezüglichen Untersuchungen in derselben Weise, wie im § 16, so kehrt auch die von der Größe der Konstanten p und der rechtwinkligen Lage des Koordinatensystems unabhängige Be-

ziehung 12) wieder, nach welcher der Berührungspunkt einer Tangente und ihr Durchschnittspunkt mit der x-Achse absolut gleiche, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Abscissen besitzen. Hierauf kann eine Lösung der Aufgabe gegründet werden, von einem außerhalb der Parabel befindlichen Punkte Tangenten an die Parabel zu legen. Zieht man nämlich durch diesen Punkt einen Durchmesser, so läuft die Berührungssehne mit der Tangente des auf diesem Durchmesser liegenden Parabelpunktes parallel, und zwar ebensoweit von dieser Tangente entfernt, als dieselbe vom gegebenen Punkte absteht.

§ 18. Die Parabel und der Kreis.

Nach Nr. 4) im § 9 kann bei Anwendung rechtwinkliger Koordinaten die Gleichung eines jeden Kreises in der Form

1) $$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + P = 0$$

geschrieben werden, wobei a und b die Mittelpunktskoordinaten bedeuten, P aber die Potenz des Koordinatenanfangs für den Kreis ausdrückt. Kehren wir nun zu dem früheren Koordinatensysteme zurück, dessen Anfang im Scheitel der Parabel lag und dessen x-Achse mit der Parabelachse zusammenfiel, so gestaltet sich die nachfolgende Betrachtung etwas einfacher, wenn wir der hierauf bezogenen Gleichung der Parabel durch Reduktion auf x die Form

2) $$x = \frac{y^2}{2p}$$

geben. Für etwa vorhandene gemeinschaftliche Punkte der Parabel und des Kreises entsteht dann durch Einsetzung des Wertes 2) in 1), wenn man noch außerdem die ganze Gleichung mit $4p^2$ multipliziert:

3) $$y^4 + 4p(p - a)y^2 - 8bp^2y + 4p^2P = 0.$$

Die dieser Gleichung entsprechenden y sind die Ordinaten der gemeinschaftlichen Punkte, zu denen die zugehörigen Abscissen aus 2) berechnet werden können.

Die Form von Nr. 3) als einer Gleichung vierten Grades, die höchstens vier reelle Wurzeln besitzen kann, gewährt der Fundamentalsatz: Ein Kreis kann mit einer Parabel höchstens vier Punkte gemein haben. Alle Kombinationen von reellen und imaginären, gleichen und ungleichen Wurzeln, die in einer

Gleichung vierten Grades zulässig sind, gewähren in gleicher Weise, wie dies bei den Untersuchungen über Parabel und Gerade mit den Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades geschehen ist, bei Anwendung auf Nr. 3) die möglichen Fälle der gegenseitigen Lage, welche zwischen Parabel und Kreis stattfinden können. Wir beschränken uns, da eine derartige allgemeine Untersuchung für eine Gleichung vierten Grades nicht ganz frei von Weitläufigkeiten und dabei von untergeordnetem praktischen Interesse ist, auf den Fall der gleichen Wurzeln, der sich zugleich für Auffindung der Beziehungen zwischen Parabel und Kreis als der wichtigste herausstellt.

Da die Gleichung 3) kein mit der dritten Potenz von y behaftetes Glied enthält, so kann sie vier gleiche Wurzeln in dem einzigen Falle besitzen, wenn alle ihre Glieder mit Ausschluß von y^4 zu Null werden*). Dies geschieht, wenn

$$a = p, \quad b = 0, \quad P = 0$$

gesetzt wird, oder mit Rücksicht auf die Bedeutung der Potenz P [vergl. § 9 Nr. 5)], wenn zu den beiden ersten dieser Gleichungen die Bedingung

$$k = p$$

hinzutritt, wobei k wie früher den Halbmesser des Kreises bezeichnen soll. Da nach Einsetzung dieser Werte Nr. 3) in

$$y^4 = 0$$

übergeht und diese Gleichung mit Hinzuziehung von Nr. 2) einzig durch den Parabelscheitel befriedigt wird, so hat der durch diese Konstanten bestimmte Kreis den Scheitel mit der Parabel gemein. Hierbei muß dieser gemeinsame Punkt so angesehen werden, als wenn er aus vier zusammenfallenden Punkten bestände, welche gleichzeitig auf der Parabel und dem Kreise gelegen sind. Diese innigste Berührung, welche zwischen einer Parabel und einem

*) Ist nämlich jede der vier gleichen Wurzeln $= r$, so hat die Gleichung die Form:

$$(y - r)^4 = 0,$$

oder nach Entwickelung des linker Hand befindlichen Ausdruckes:

$$y^4 - 4ry^3 + 6r^2y^2 - 4r^3y + r^4 = 0.$$

Hierin kann ein Glied mit Ausschluß des ersten nur fehlen, wenn $r = 0$ ist; dann kommen aber auch alle r enthaltenden Glieder in Wegfall.

Kreise vorkommen kann, findet also nur in einem Punkte, nämlich im Scheitel, statt.

In jedem andern Falle kann die Gleichung 3) höchstens drei gleiche Wurzeln enthalten, d. h. die Parabel steht dann mit demjenigen Kreise in der innigsten Berührung, welcher drei zusammenfallende Punkte mit ihr gemein hat. Ein solcher Kreis wird Krümmungskreis, sein Mittelpunkt Krümmungsmittelpunkt, sein Halbmesser Krümmungshalbmesser genannt. Die allgemeine Bedingungsgleichung für den Fall, wo ein Kreis in den Krümmungskreis einer Parabel übergeht, kann hiernach gefunden werden, wenn man das Kennzeichen aufsucht, von welchem das Vorhandensein dreier gleichen Wurzeln in Nr. 3) abhängig ist. Einfacher jedoch, als auf diesem für elementare Untersuchungen bei Gleichungen höherer Grade nicht ganz bequemen Wege, gelangt man zur Bestimmung von Krümmungskreisen einer Parabel, wenn man zunächst den Mittelpunkt eines Kreises sucht, welcher durch drei beliebige Parabelpunkte hindurchgeht, und dann hieraus diejenige Form des Resultats ableitet, die sich in dem Grenzfalle ergibt, wo die drei anfänglich getrennten Punkte in einen zusammenschwinden.

Der Mittelpunkt eines durch drei Punkte zu legenden Kreises befindet sich bekanntlich im Durchschnitte der auf den Mitten der Verbindungsgeraden je zweier dieser drei Punkte errichteten Senkrechten. Soll daher ein Kreis durch drei Parabelpunkte hindurchgehen, so hat man zur Auffindung seines Mittelpunktes sich zwei Sehnen gezogen zu denken, von denen jede zwischen zweien der gegebenen Punkte gelegen ist, und den gemeinschaftlichen Punkt der Mittellote dieser Sehnen zu suchen. Wir wollen die beiden Sehnenmitten mit $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ bezeichnen. Nach Nr. 3) des vorigen Paragraphen gehört der ersten von den beiden Sehnen die Richtungskonstante

$$A = \frac{p}{y_1}$$

zu; die im Punkte $x_1 y_1$ darauf senkrechte Gerade hat demnach die Gleichung:

$$4) \qquad y - y_1 = -\frac{y_1}{p}(x - x_1).$$

Ebenso findet sich für die zweite Senkrechte:

5) $$y - y_2 = -\frac{y_2}{p}(x - x_2),$$

und, wenn man aus 4) und 5) y entfernt, für die Abscisse des gesuchten Kreismittelpunktes:

$$x = p + \frac{x_1 y_1 - x_2 y_2}{y_1 - y_2}$$

oder auch

6) $$x = p + x_1 + \frac{y_2(x_1 - x_2)}{y_1 - y_2}.$$

Nach Nr. 9) im § 5 stellt $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ die Richtungskonstante der die Punkt $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ verbindenden Geraden dar; bezeichnet man daher mit α den Winkel, welchen diese Gerade mit der x-Achse einschließt, so ist

$$\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2} = \cot\alpha,$$

und aus Nr. 6) ensteht:

7) $$x = p + x_1 + y_2 \cot\alpha.$$

Wird endlich dieser Wert von x in die Gleichung 4) eingesetzt, so erhält man für die Ordinate des gesuchten Mittelpunktes:

8) $$y = -\frac{y_1 y_2}{p}\cot\alpha.$$

Die in Nr. 7) und 8) gefundenen Werte von x und y behalten noch eine bestimmte Größe, wenn man die drei Parabelpunkte und damit auch die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ in einen zusammenfallen läßt; sie gehen dann in die Koordinaten des einem Parabelpunkte zugehörigen Krümmungsmittelpunktes über. Die Verbindungsgerade der Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ wird hierbei zur Parabeltangente: nach Nr. 9) im § 16 ist demnach in diesem Falle

$$\tan\alpha = \frac{p}{y_1}$$

zu setzen. Man erhält so für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$x = p + x_1 + \frac{y_1^2}{p}$$

oder mit Benutzung der Parabelgleichung:

9) $$x = p + 3x_1$$

und

10) $$y = -\frac{y_1^3}{p^2}.$$

Beachtet man, daß beim Zusammenfallen zweier Kurvenpunkte die Verbindungsgerade dieser beiden Punkte in die Tangente, und die auf der Mitte der zugehörigen Sehnen errichtete Senkrechte in die Normale desjenigen Kurvenpunktes übergeht, in welchem die beiden anfänglich getrennten Punkte zusammengetreten sind, so folgt hieraus, daß die im vorigen angewendete Methode auf die Aufgabe zurückgeführt werden kann, den Durchschnittspunkt zweier unmittelbar benachbarten Normalen zu suchen. In der Tat zeigt auch die Vergleichung mit Nr. 14) im § 16, daß die von uns angewendeten Gleichungen 4) und 5) die Gleichungen zweier Normalen in den Parabelpunkten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ darstellen. Da hiernach der Krümmungsmittelpunkt in der Normale des zugehörigen Kurvenpunktes gelegen sein muß, so genügt es zu seiner konstruktiven Darstellung, eine seiner beiden Koordinaten zu kennen, oder noch besser, sogleich die Länge des Krümmungshalbmessers ausfindig zu machen.

Wird wie im vorigen mit xy der einem Kurvenpunkte $x_1 y_1$ zugehörige Krümmungsmittelpunkt bezeichnet, so gilt für den Krümmungshalbmesser ϱ, welcher die Entfernung dieser beiden Punkte mißt, die Gleichung:

11) $$\varrho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Mit Einsetzung der in 9) und 10) aufgestellten Werte von x und y entsteht hieraus im Falle der Parabel:

$$\varrho^2 = (p + 2x_1)^2 + \left(y_1 + \frac{y_1^3}{p^2}\right)^2,$$

und hieraus erhält man mit Benutzung der Parabelgleichung:

$$\varrho^2 = \frac{(p^2 + y_1^2)^3}{p^4},$$

also für den Krümmungshalbmesser selbst:

12) $$\varrho = \frac{(\sqrt{p^2 + y_1^2})^3}{p^2}.$$

Faßt man im Zähler dieses Wertes p als Subnormale auf, so ist leicht zu erkennen, daß $\sqrt{p^2 + y_1^2}$ die zwischen dem Parabelpunkte und der x-Achse enthaltene Strecke der Normale, die sogenannte Länge der Normale darstellt. Wird dieselbe mit n bezeichnet, so kann Nr. 12) in der Form

13) $$\varrho = u\left(\frac{u}{p}\right)^2$$

geschrieben werden. Dieser Ausdruck gewährt eine sehr einfache Konstruktion des Krümmungshalbmessers. Ist nämlich MP in Fig. 34 die Ordinate des Parabelpunktes P, und $MN = p$ seine Subnormale, also $NP = u$ die Länge der Normale, so wird

$$\frac{u}{p} = \sec MNP,$$

oder auch wegen der Gleichheit der Winkel, welche die Normale mit Brennstrahl und Achse einschließt,

$$\frac{u}{p} = \sec NPF.$$

Setzen wir also $\angle NPF = \gamma$, so ist in der Figur

$$\varrho = NP \cdot \sec^2 \gamma.$$

Wird daher im Punkte N auf der Normale eine Senkrechte NQ errichtet, die den verlängerten Brennstrahl in Q schneidet, so ist

$$QP = NP \cdot \sec \gamma,$$

und wenn man nachher wieder in Q eine Senkrechte auf QP zieht, bis sie im Punkte O die Normale trifft, so folgt:

$$OP = QP \cdot \sec \gamma = NP \cdot \sec^2 \gamma.$$

OP ist also Krümmungshalbmesser und O Krümmungsmittelpunkt für den Parabelpunkt P.

§ 19. Die Quadratur der Parabel.

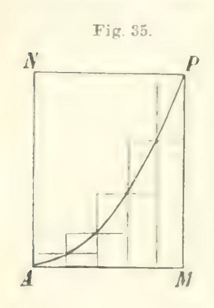
Wenn man in dem rechtwinkligen Koordinatensysteme, welches wir bis jetzt zur Untersuchung der Parabel benutzt haben, die x- und y-Achse untereinander vertauscht, also die Parabelachse zur Achse der y und die Scheiteltangente zur Achse der x werden läßt, so kann die Gleichung der Parabel in der Form

1) $$y = \frac{x^2}{2p}$$

geschrieben werden, indem bei dieser Vertauschung der Achsen die x und y lediglich ihre Stellen wechseln. Wir machen von dieser

Gleichung Gebrauch zur Bestimmung des Inhalts der parabolischen Fläche APM (Fig. 35), welche von dem Parabelbogen AP und den Koordinaten des Punktes P, nämlich $AM = x$ und $MP = y$ begrenzt ist. Mit Rücksicht auf das zu Grunde gelegte Koordinatensystem stellt hierbei A den Parabelscheitel dar und die Abscisse AM ist auf der Scheiteltangente gemessen.

Fig. 35.



Teilen wir $AM = x$ in n gleiche Teile und legen durch jeden Teilpunkt eine Ordinate, so zerfällt die gesuchte Fläche in eine gleiche Anzahl von Streifen, von denen jeder über der Basis $\frac{x}{n}$ steht. Die Ordinaten, durch welche diese Streifen begrenzt werden, haben nach Nr. 1) in ihrer Reihenfolge vom Scheitel aus die Längen:

$$\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2}{2p},\quad \frac{\left(\frac{2x}{n}\right)^2}{2p},\quad \frac{\left(\frac{3x}{n}\right)^2}{2p},\ \cdots\ \frac{\left(\frac{n-1}{n}x\right)^2}{2p},\quad \frac{\left(\frac{nx}{n}\right)^2}{2p},$$

oder auch:

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2 y,\quad \left(\frac{2}{n}\right)^2 y,\quad \left(\frac{3}{n}\right)^2 y,\quad \cdots\quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 y,\quad y.$$

Jeder einzelne von zwei solchen Ordinaten begrenzte Streifen kann nun in zwei Grenzen eingeschlossen werden, indem man über der Basis $\frac{x}{n}$ einmal ein Rechteck mit der Anfangsordinate, ein anderes Mal mit der Endordinate konstruiert. Ein Rechteck ersterer Art besitzt einen kleineren Inhalt, während der zweite größer ist als die zugehörige Streifenfläche. Die Summe der letzteren Rechtecke ist hiernach ebenfalls größer, die der ersteren dagegen kleiner als die gesuchte parabolische Fläche, welche wir F nennen wollen. Hieraus entstehen folgende zwei Ungleichungen:

$$F < \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} \cdot xy,$$

$$F > \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} \cdot xy.$$

Der Unterschied dieser beiden Grenzen, zwischen welchen der Wert von F eingeschlossen ist, beträgt $\frac{1}{n} xy$, kann demnach kleiner als jede angebbare Größe gemacht werden, wenn man n in ent-

sprechender Weise wachsen läßt. Für unendlich wachsende n fallen beide Grenzen zusammen, und man erhält, wenn man den Grenzwert, gegen welchen beide Ausdrücke konvergieren, durch Vorsetzen der Silbe Lim (Abkürzung von limes = Grenze) bezeichnet,

$$F = \text{Lim}\,\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} \cdot xy,$$

oder nach einem bekannten arithmetischen Satze*)

2) $$F = \frac{1}{3}\,xy,$$

und hieraus die Fläche APN, welche F' heißen mag,

3) $$F' = \frac{2}{3}\,xy.$$

Eine größere Verallgemeinerung erlangen die gefundenen Resultate, wenn man die zu ihrer Herleitung benutzte Methode auf das

---

*) Aus dem für ganze positive m geltenden Divisionsresultate

$$\frac{a^m - b^m}{a - b} = a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}$$

ergibt sich für $a > b > 0$ die Richtigkeit der Ungleichung

$$m\,a^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > m\,b^{m-1}.$$

Hieraus wird, wenn man $m = p + 1$ und einmal $a = z + 1$, $b = z$, ein anderes Mal $a = z$, $b = z - 1$ setzt, das Resultat

$$\frac{(z+1)^{p+1} - z^{p+1}}{p+1} > z^p > \frac{z^{p+1} - (z-1)^{p+1}}{p+1}$$

abgeleitet, wobei p eine beliebige ganze positive Zahl bedeutet. Substituiert man hierin der Reihe nach $z = 1, 2, 3, \ldots n$, und addiert alle so entstehenden Ungleichungen, so folgt:

$$\frac{(n+1)^{p+1} - 1}{p+1} > 1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p > \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Die aus Division durch n^{p+1} sich ergebenden Resultate konvergieren bei unendlich wachsenden n gegen die gemeinschaftliche Grenze $\frac{1}{p+1}$ und man erhält hieraus:

$$\text{Lim}\,\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

In dem oben vorkommenden Falle war $p = 2$, also der Grenzwert $= \frac{1}{3}$.

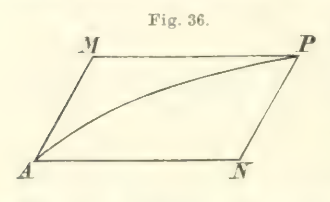
im § 17 zu Fig. 33 aufgestellte Koordinatensystem überträgt und dabei wieder eine Vertauschung der x- und y-Achse eintreten läßt.

Man erhält dann aus § 17 Nr. 6) die Parabelgleichung:

$$1) \qquad y = \frac{x^2 \sin^2 \omega}{2p},$$

welche in ähnlicher Weise wie die obige Gleichung 1) angewendet werden kann, um die zwischen einem Parabelbogen, der Tangente eines seiner Endpunkte und der durch den anderen Endpunkt gelegten Parallelen zur Parabelachse enthaltene Fläche zu berechnen. Das hierbei sich ergebende Resultat lautet, daß, wenn in Fig. 36 der Parabelbogen AP in das Parallelogramm $AMNP$ so gelegt ist, das er die Seite AM im Punkte A tangiert, während seine Achse mit der Seite AN parallel läuft, die durch den Parallelbogen gebildeten Parallelogrammteile AMP und ANP sich wieder wie $1:2$ verhalten*).

Fig. 36.



*) Sieht man bei Fig. 36 oder 35 von der Vertauschung der Koordinatenachsen ab, so stößt man bei Berechnung der Fläche ANP nach der angegebenen Methode auf einen Grenzwert von der Form

$$\text{Lim} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n}}{n\sqrt{n}},$$

welcher gleich $\frac{2}{3}$ sein muß, wenn das Ergebnis mit dem vorher entwickelten in Übereinstimmung kommen soll. Ebendahin führt das Resultat der vorigen Anmerkung, wenn sich beweisen läßt, daß es auch für gebrochene Werte von p Geltung behält. Man gelangt hierzu durch folgende Betrachtung.

Werden die Glieder einer beliebigen fallenden Zahlenreihe mit

$$u_1 > u_2 > u_3 > \cdots > u_{n-1} > u_n$$

bezeichnet, und ist

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$

deren Summe, so folgt aus

$$S_n + u_{n+1} = S_{n+1}$$

nach Multiplikation mit n, wenn man $n u_{n+1}$ mit dem nach der gestellten Bedingung größeren Werte S_n vertauscht,

$$(n+1) S_n > n S_{n+1}.$$

Dies gibt das Resultat:

$$\frac{S_n}{n} > \frac{S_{n+1}}{n+1} > \frac{S_{n+2}}{n+2} > \cdots$$

Die Simpsonsche Regel. Aus der obigen Gleichung 2) läßt sich noch eine allgemeine Methode zur näherungsweisen Berechnung von ebenen Flächen herleiten, welche über einer gegebenen Abscisse stehend, von zwei rechtwinkligen Ordinaten und einem beliebigen Kurvenbogen begrenzt sind. Hierzu führt folgende Voruntersuchung.

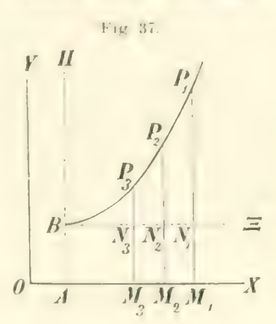


Fig. 37.

In Fig. 37 ist B der Scheitel einer Parabel, deren Achse BH mit der y-Achse des rechtwinkligen Koordinatensystems parallel läuft. Wir stellen uns die Aufgabe, die Fläche $P_3 M_3 M_1 P_1$, die mit S bezeichnet werden mag, mittels der Koordinaten der drei Punkte P_3, P_2 und P_1 zu berechnen, wobei der Punkt P_2 so gewählt ist, daß durch seine Ordinate die Strecke $M_3 M_1$ in zwei gleiche Teile geteilt wird. Verschieben wir die

---

In gleicher Weise ist in einer steigenden Zahlenreihe

$$\frac{S_n}{n} < \frac{S_{n+1}}{n+1} < \frac{S_{n+2}}{n+2} < \cdots$$

Bei Anwendung auf das Divisionsresultat

$$\frac{a^r - b^r}{a - b} = a^{r-1} + a^{r-2} b + \cdots + a^{r-s-1} b^s + \cdots + b^{r-1},$$

worin $a > b > 0$ sein und r eine beliebige ganze positive Zahl bezeichnen soll, liefern einerseits die s Anfangsglieder, andererseits die s Endglieder die Ungleichung

$$\frac{a^{r-s}(a^s - b^s)}{s(a-b)} > \frac{a^r - b^r}{r(a-b)} > \frac{b^{r-s}(a^s - b^s)}{s(a-b)},$$

woraus weiter

$$\frac{r}{s} a^{r-s} > \frac{a^r - b^r}{a^s - b^s} > \frac{r}{s} b^{r-s}$$

hervorgeht. Man gelangt hierdurch wieder zu der in der vorigen Anmerkung aufgestellten Ungleichung:

$$m a^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > m b^{m-1},$$

wenn man $\frac{r}{s}$ mit m und a mit $a^{\frac{1}{s}}$ vertauscht, nur daß sie jetzt auch für gebrochene Werte von m gilt, welche größer sind als 1. Der Fortgang der Betrachtung bleibt dann wie vorher.

Koordinatenachsen parallel zu sich selbst in die Lage von BH und $B\Xi$, und bezeichnen die Koordinaten eines auf das neue System bezogenen Punktes mit ξ und η, so lautet nach Nr. 1) die Parabelgleichung:

$$5) \qquad \eta = \frac{\xi^2}{2p}.$$

Für den durch die Scheiteltangente $B\Xi$ von der zu berechnenden Fläche S abgeschnittenen Teil $P_3 N_3 N_1 P_1 = T$ gilt dann nach 2) die Formel:

$$T = \frac{1}{3}(\xi_1 \eta_1 - \xi_3 \eta_3),$$

oder mit Benutzung von Nr. 5):

$$T = \frac{\xi_1^3 - \xi_3^3}{6p},$$

wobei $\xi_1 \eta_1$ und $\xi_3 \eta_3$ sich auf die Punkte P_1 und P_3 beziehen. Hieraus folgt, wenn man $M_3 M_2 = M_2 M_1 = \varepsilon$, also $\xi_1 - \xi_3 = 2\varepsilon$ setzt:

$$T = \frac{\varepsilon(\xi_1^2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_3^2)}{3p},$$

oder nach einfaches Umgestaltung:

$$T = \frac{\varepsilon\{\xi_1^2 + (\xi_1 + \xi_3)^2 + \xi_3^2\}}{6p}.$$

Nun ist aber $\frac{\xi_1 + \xi_3}{2} = \xi_2$, d. i. der Abscisse des Punktes P_2 gleich. Mit Wiedereinsetzung der Ordinaten aus Nr. 5) entsteht hiernach:

$$6) \qquad T = \frac{1}{3}\varepsilon(\eta_1 + 4\eta_2 + \eta_3).$$

Kehren wir jetzt zum ursprünglichen Koordinatensystem zurück und setzen:

$$OA = a, \qquad AB = b,$$

$$M_1 P_1 = y_1, \qquad M_2 P_2 = y_2, \qquad M_3 P_3 = y_3,$$

so ergibt sich aus Nr. 6):

$$T = \frac{1}{3}\varepsilon\{(y_1 - b) + 4(y_2 - b) + (y_3 - b)\},$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$T = \frac{1}{3}\varepsilon(y_1 + 4y_2 + y_3) - 2b\varepsilon.$$

Hieraus folgt, wenn man beiderseitig

$$\text{Fläche } N_3 M_3 M_1 N_1 = 2b\varepsilon$$

addiert,

$$7) \qquad S = \frac{\varepsilon}{3}(y_1 + 4y_2 + y_3).$$

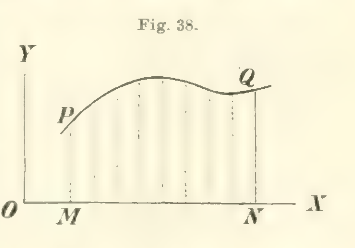
Dieses Resultat ist von dem Vorzeichen von b unabhängig, gilt also auch noch dann, wenn die konkave Seite des Parabelbogens der x-Achse zugewendet ist.

Die vorhergehenden Betrachtungen lassen insofern eine Umkehrung zu, als, wenn drei Punkte in der Lage von P_1, P_2 und P_3 gegeben sind, es im allgemeinen möglich ist, durch dieselben eine Parabel zu legen, deren Achse den Ordinaten parallel läuft. Unter der gemachten Voraussetzung lautet nämlich nach Nr. 5) die Parabelgleichung:

$$y - b = \frac{(x-a)^2}{2p},$$

und wenn man hierin die Koordinaten der drei Punkte einsetzt, so erhält man drei Bedingungsgleichungen, aus denen sich die Konstanten a, b und p herleiten lassen. Die gestellte Forderung trägt in dem einzigen Falle einen Widerspruch in sich, wenn die drei Punkte in derselben geraden Linie liegen; doch läßt sich aus der Zusammensetzung der Formel 7) leicht übersehen, daß sie auch dann noch ihre Geltung behält. Jedesmal also, wenn man sich durch die Endpunkte der drei um die Strecke ε von einander entfernten Ordinaten y_3, y_2 und y_1 eine Parabel gelegt denkt, deren Achse parallel zu den Ordinaten ist, wird die Größe der Fläche des zwischen y_3 und y_1 enthaltenen Streifens durch die Gleichung 7) ausgedrückt.

Fig. 38.



Hiervon kann Gebrauch zur annäherungsweisen Berechnung der Fläche $PMNQ$ (Fig. 38) gemacht werden. Zerlegt man die nach ihrem Inhalte zu bestimmende Fläche, die wir mit F bezeichnen wollen, durch Ordinaten in eine gerade Anzahl von Streifen, so mag wieder ε die Breite eines jeden solchen Streifens darstellen, während die aufeinander folgenden Ordinaten die Bezeichnung $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{2n}$ erhalten sollen. Man kann jetzt die Bogenstücke,

welche drei aufeinander folgende Ordinatenpunkte verbinden, näherungsweise als Parabelbögen ansehen, und erhält dann, wenn man für jedes Streifenpaar einen Ausdruck von der Form 7) aufstellt, durch Summierung aller Streifenpaare nach gehöriger Verbindung der gleichartigen Größen:

$$8)\quad F = \frac{1}{3}\,\varepsilon\,\{y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{2n-2})\}.$$

Diese unter dem Namen der Simpsonschen Regel bekannte Formel gewährt in den meisten Fällen einen nicht unbeträchtlichen, mit der Anzahl der Zwischenordinaten wachsenden Grad von Genauigkeit.

Sechstes Kapitel.

Die Ellipse.

§ 20. Die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Bei Gelegenheit der im § 14 angestellten allgemeinen Betrachtung der Kegelschnitte haben wir unter Nr. 7) die Gleichung

1) $$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

einer Ellipse angehörig gefunden, deren große und kleine Achse $2a$ und $2b$ die Achsen der x und y darstellen. Die Form dieser Gleichung ließ uns bereits die allgemeinen Umrisse der darin dargestellten Kurve erkennen; es bleibt uns noch übrig, das Bild dadurch weiter auszuführen, daß wir der Gleichung die Mittel zur konstruktiven Darstellung der Linie entnehmen.

Wird Nr. 1) durch Entfernung der Nenner auf die Form

2) $$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

gebracht, so läßt sich mit Einsetzung von $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ die Ellipse auf ein Polarkoordinatensystem beziehen, welches den Mittelpunkt zum Pol und die große Achse zur polaren Achse hat. Es entsteht nach einfacher Umgestaltung:

3) $$r^2 = \frac{a^2b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi},\text{*)}$$

oder, wenn wir nach § 14 Nr. 9) mittels der Gleichung

*) Ein größerer Wert von r^2 als der durch die Gleichung 3) ausgedrückte muß offenbar einem außerhalb des von der Ellipse eingeschlossenen Teiles der Ebene gelegenen Punkte angehören, während kleinere Werte sich auf den innerhalb gelegenen Teil beziehen. Geht man in den sich hieraus ergebenden Ungleichungen auf die rechtwinkligen Koordinaten zurück, so findet man

$$b^2 = a^2 - c^2$$

die lineare Exzentrizität c einführen,

4) $$r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 - c^2 \cos^2 \varphi}.$$

Beschränken wir uns auf die zwischen den Grenzen 0 und 90^0 gelegenen Polarwinkel, was insofern ausreicht, als damit einer der vier unter sich kongruenten Ellipsenquadranten vollständig umfaßt wird, so erkennen wir hieraus, daß r bei wachsendem φ abnimmt, daß also a und b den größten und kleinsten Radius der Ellipse darstellen. Ein vom Mittelpunkte aus mit dem Halbmesser a konstruierter Kreis ist daher so um die Ellipse beschrieben, daß er mit ihr nur die Scheitel der großen Achse gemein hat; der konzentrische Kreis mit dem Radius b ist in ähnlicher Weise eingeschrieben. Beide Kreise sollen ausschließlich der umgeschriebene und der eingeschriebene Kreis der Ellipse genannt werden. Kehren wir zum rechtwinkligen Koordinatensysteme zurück, so hat der erstere dieser Kreise die Gleichung:

5) $$x^2 + y^2 = a^2,$$

der zweite dagegen:

6) $$x^2 + y^2 = b^2.$$

Aus der Zusammenstellung dieser beiden Gleichungen mit Nr. 1) oder 2) finden wir Mittel zur konstruktiven Darstellung der Ellipse. Es genügt hierbei aus dem oben angegebenen Grunde wieder, wenn wir uns auf die Betrachtung des Quadranten beschränken, in welchem beide Koordinaten positive Werte besitzen.

Bezeichnen wir die Ordinaten der Ellipse und des umgeschriebenen Kreises, welche einer und derselben Abscisse angehören, mit y und y', so folgt aus 1) und 5)

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad y' = \sqrt{a^2 - x^2},$$

und hieraus durch Division:

$$a^2y^2 + b^2x^2 > a^2b^2$$

als Kennzeichen der außerhalb der Ellipse gelegenen Punkte, während die Ungleichung

$$a^2y^2 + b^2x^2 < a^2b^2$$

für Punkte innerhalb der Ellipse gilt.

7) $$y : y' = b : a,$$

d. h. die derselben Abscisse entsprechenden Ordinaten der Ellipse und des umgeschriebenen Kreises stehen zueinander in dem unveränderlichen Verhältnisse der Halbachsen. Hiernach können beliebig viele Punkte einer Ellipse gewonnen werden, wenn man die auf demselben Durchmesser rechtwinkligen Ordinaten eines Kreises in einem konstanten Verhältnisse verkürzt*).

Bei Vergleichung der Ellipse mit dem eingeschriebenen Kreise sollen x und x'' die derselben Ordinate zugehörigen Abscissen der Ellipse und des Kreises darstellen. Dann ergibt sich aus 1) und 6)

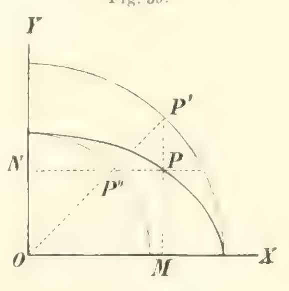
$$x = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}, \quad x'' = \sqrt{b^2 - y^2},$$

und dies führt zu der Proportion:

8) $$x : x'' = a : b.$$

Die Ellipse kann hiernach gebildet werden, indem man sämtliche Abscissen des eingeschriebenen Kreises in dem unveränderlichen Verhältnisse der elliptischen Halbachsen verlängert.

Fig. 39.



Die im vorigen enthaltene Vergleichung der Ellipse mit den beiden über ihren Achsen beschriebenen Kreisen führt auf die folgende einfache Konstruktion von beliebig vielen ihrer Punkte, mit gleichzeitiger Anwendung beider Kreise. Zieht man in Fig. 39 den Radius OP', welcher die beiden Kreise in den Punkten P' und P'' schneidet, und legt durch P' die Gerade $P'M$ parallel zur y-Achse, und NP'' durch P'' parallel zur x-Achse, so ist der Durchschnittspunkt P dieser beiden Geraden ein Ellipsenpunkt. Sobald nämlich mit Anwendung der obigen Bezeichnungen

*) Dies geschieht z. B. bei geometrischer Projektion des Kreises auf eine zu diesem Durchmesser parallele gegen die Kreisebene geneigte Ebene. Diese Bemerkung ist insofern nicht ohne Wichtigkeit, als dadurch der Geometrie ein Mittel gegeben ist, Eigenschaften der Ellipse aus entsprechenden Kreiseigenschaften abzuleiten.

$$NP = OM = x, \qquad MP = ON = y,$$
$$NP'' = x'', \qquad MP' = y'$$

gesetzt wird, so ergibt sich aus

$$MP : MP' = OP'' : OP'$$

die Proportion Nr. 7), und Nr. 8) aus:

$$OM : NP'' = OP' : OP''.$$

Zu bemerken ist hierbei noch, daß die angewendete Konstruktion eine einfache Bestätigung findet, wenn man die Quotienten $\frac{OM}{OP'} = \frac{x}{a}$ und $\frac{ON}{OP''} = \frac{y}{b}$ als trigonometrische Funktionen des Winkels $MOP' = NP''O$ auffaßt. Bezeichnet man diesen Winkel (die sogenannte exzentrische Anomalie) mit α, so ist

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha, \qquad \frac{y}{b} = \sin\alpha,$$

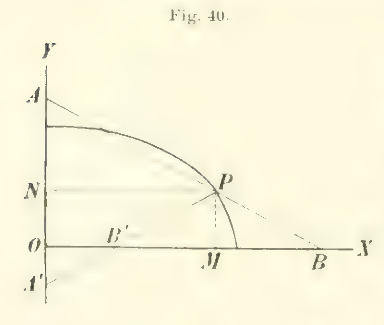
und hieraus folgt sogleich für den Punkt P die Ellipsengleichung 1).

Die hierin enthaltene Analogie zwischen der goniometrischen Gleichung

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

und der Gleichung der Ellipse kann zu einer zweiten Darstellungsweise dieser Kurve benutzt werden. Läßt man eine Gerade AB von unveränderlicher Länge mit ihren Endpunkten A und B auf den Schenkeln OY und OX eines rechten Winkels gleiten und beobachtet den Weg, den dabei ein auf der Geraden gelegener fester Punkt P durchläuft, so ist, wenn man $AP = a$, $PB = b$, $OM = NP = x$, $MP = ON = y$ setzt, für jede Lage des Punktes P

Fig. 40.



$$\frac{x}{a} = \cos NPA, \qquad \frac{y}{b} = \sin OBA,$$

folglich da $\angle NPA = \angle OBA$,

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Der Punkt P beschreibt also eine Ellipse. — Es ist leicht ersichtlich, daß hierbei der beschreibende Punkt auch auf der Verlängerung

der unveränderlichen Geraden gelegen sein kann. Die Gerade $A'B'$ in Fig. 40, die mit dem Punkte A' auf der y-Achse und mit B' auf der x-Achse gleitet, stellt diesen Fall dar. $A'P$ ist hier wieder $= a$ und $B'P = b$ angenommen.

Sowie im § 15 unter II. die Parabel durch Zerlegung der Seiten ihrer Gleichung in zwei Faktoren ersten Grades mittels des Durchschnittes von zwei veränderlichen Geraden dargestellt wurde, so läßt sich auch ein ähnliches Verfahren für die Ellipse und überhaupt für jede Linie zweiten Grades anwenden. Haben zwei Gerade die Gleichungen

$$9)\qquad \frac{y}{b_1} = 1 + \frac{x}{a},$$

$$10)\qquad \frac{y}{b_2} = 1 - \frac{x}{a},$$

so gilt für ihren Durchschnittspunkt auch die durch Multiplikation derselben entstehende Gleichung:

$$\frac{y^2}{b_1 b_2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \quad \text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b_1 b_2} = 1,$$

und diese gehört einer Ellipse an, wenn $b_1 b_2 = b^2$, oder wenn die stetige Proportion

$$11)\qquad b_1 : b = b : b_2$$

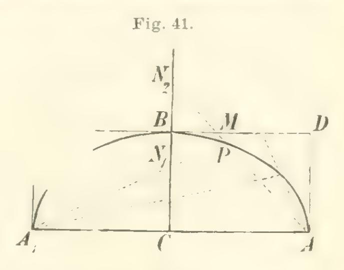
erfüllt wird. Hierauf gründet sich die folgende Konstruktion.

In dem Rechtecke $CADB$ (Fig. 41), dessen Seiten CA und CB die Halbachsen der zu konstruierenden Ellipse darstellen, teile man DB und CB in den Punkten M und N_1 so, daß die Proportion

$$DM : DB = CN_1 : CB$$

stattfindet. Legt man hierauf durch den Scheitel A der großen Achse die Gerade AM und durch den zweiten Scheitel A_1 die Gerade A_1N_1, so ist der Durchschnittspunkt P beider Geraden ein Ellipsenpunkt. Wird nämlich $CN_1 = b_1$, $CN_2 = b_2$ gesetzt, und bezeichnen wir wie gewöhnlich die Halbachsen mit a und b, so stellt Nr. 9) die Gleichung der Geraden A_1N_1 und Nr. 10) die von AN_2 dar. Was die dabei zu erfüllende Bedingung 11) betrifft, so gilt der Konstruktion zufolge die Proportion:

Fig. 41.



$$DM : AC = AD : CN_1.$$

Hieraus entsteht aber, wenn man AC mit der gleichen Strecke DB vertauscht und die gegebene Relation

$$DM : DB = CN_1 : CB$$

anwendet, die verlangte Bedingung.

Brennpunkte der Ellipse. Soll die Ellipse mittels ihrer Brennpunkte konstruiert werden, so entsteht wieder, wie bei der Parabel, die Frage nach der Anzahl und Lage solcher Punkte. Wir haben im § 15 unter Nr. 6) und 7) gefunden, daß, wenn x und y die Koordinaten eines auf einer Linie zweiten Grades gelegenen Punktes, ξ und η dagegen die eines zugehörigen Brennpunktes darstellen, zwischen diesen Größen eine Gleichung von der Form

$$12) \qquad (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2$$

stattfinden muß, welche nach Ausführung der Rechnung in

$$13) \quad \begin{cases} (1-\alpha^2)x^2 + (1-\beta^2)y^2 - 2\alpha\beta xy - 2(\xi + \alpha\gamma)x \\ \qquad - 2(\eta + \beta\gamma)y + \xi^2 + \eta^2 - \gamma^2 = 0 \end{cases}$$

übergeht. Damit es möglich ist, diese Gleichung auf die Formen 1) oder 2) der Ellipsengleichung zurückzuführen, müssen die Bedingungen

$$\alpha\beta = 0, \quad \xi + \alpha\gamma = 0, \quad \eta + \beta\gamma = 0$$

erfüllt werden, von denen die erste und zweite, oder die erste und dritte nur dann nebeneinander bestehen können, wenn entweder zugleich $\alpha = 0$ und $\xi = 0$, oder $\beta = 0$ und $\eta = 0$ ist. Man sieht hieraus, daß Brennpunkte der Ellipse nur in einer der beiden Achsen gelegen sein können. Nehmen wir zunächst $\beta = 0$ und $\eta = 0$, suchen also solche Brennpunkte, die in der x-Achse gelegen sind, so ist nach der zweiten der zu erfüllenden Bedingungen $\alpha = -\frac{\xi}{\gamma}$ zu setzen. Mit Substitution dieser Werte kann Nr. 13) auf die Form

$$\frac{\gamma^2 - \xi^2}{\gamma^2}\, x^2 + y^2 = \gamma^2 - \xi^2$$

gebracht werden, woraus sich die Gleichung

$$\frac{x^2}{\gamma^2} + \frac{y^2}{\gamma^2 - \xi^2} = 1$$

ergibt. Dieselbe gehört einer Ellipse an, für deren Halbachsen die Beziehungen

$$a = \gamma, \quad b^2 = \gamma^2 - \xi^2$$

stattfinden. Durch Verbindung der beiden letzten Relationen entsteht:

14) $$\xi^2 = a^2 - b^2,$$

oder mit Einführung der linearen Exzentrizität c:

15) $$\xi = \pm c,$$

wodurch wir auf die zwei bereits in Fig. 27 dargestellten Brennpunkte zurückkommen.

Für Brennpunkte in der y-Achse müßte $\alpha = 0$ und $\xi = 0$ gesetzt und dazu die Bedingung $\beta = -\frac{\eta}{\gamma}$ gefügt werden. Wird mit Benutzung dieser Größen die vorhergehende Rechnung wiederholt, so gelangt man durch bloße Buchstabenvertauschung zu dem Resultate:

16) $$\eta^2 = b^2 - a^2,$$

was, da $a > b$ vorausgesetzt ist, zu imaginären Werten hinführt. Die Ellipse enthält also nur die beiden in der großen Achse zu beiden Seiten des Mittelpunktes im Abstande c gelegenen Brennpunkte.

Bezeichnen wir mit z_1 den Abstand eines Ellipsenpunktes xy von dem auf der Seite der positiven x gelegenen Brennpunkte, so ist in der aus Nr. 12) folgenden Gleichung

$$z_1^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2$$

nach den oben gefundenen Relationen

$$\gamma = a, \quad \beta = 0, \quad \alpha = -\frac{\xi}{\gamma} = -\frac{c}{a} = -\varepsilon$$

zu setzen, wobei ε wie früher (vgl. § 14 Nr. 8) die numerische Exzentrizität darstellt. Hieraus folgt:

$$z_1^2 = (a - \varepsilon x)^2,$$

und, da für jedes x (also z. B. auch für $x = 0$) nur positive Werte von z_1 zulässig sind,

17) $$z_1 = a - \varepsilon x.$$

In gleicher Weise findet sich, wenn man $\xi = -c$ nimmt, für den auf den anderen Brennpunkt bezogenen Brennstrahl:

18) $$z_2 = a + \varepsilon x,$$

und endlich aus der Verbindung von 17) und 18):

19) $$z_1 + z_2 = 2a.$$

So gelangen wir durch die analytische Untersuchung der Ellipsengleichung zu der bereits im § 14 auf Fig. 26 hergeleiteten Unveränderlichkeit der Summe der Brennstrahlen zurück. Es gewährt durchaus keine Schwierigkeit, dieser Eigenschaft die Mittel zur Konstruktion einer Ellipse zu entnehmen, für welche die große Achse und die Brennpunkte gegeben sind.

§ 21. Die Ellipse und die Gerade.

Für die Koordinaten derjenigen Punkte, welche gleichzeitig in einer Ellipse mit der Gleichung

1) $$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

und einer Geraden

2) $$y = Mx + n\,^{*})$$

gelegen sind, müssen die Gleichungen beider Linien Geltung finden. Durch Elimination von y erhält man hieraus für die Abscissen dieser Punkte:

3) $$(a^2M^2 + b^2)x^2 + 2a^2Mnx + a^2(n^2 - b^2) = 0.$$

Das y, welches einem jeden hieraus folgenden x zugehört, ist aus Nr. 2) zu berechnen.

Da $a^2M^2 + b^2$ in einer Ellipse nicht gleich Null sein kann, so ist die Gleichung 3) stets quadratisch, gewährt also rücksichtlich der Beschaffenheit ihrer Wurzeln die bei quadratischen Gleichungen möglichen drei Fälle, welche nach dem Vorzeichen der Diskriminante

$$\Delta = a^2(n^2 - b^2)(a^2M^2 + b^2) - a^4M^2n^2$$

zu beurteilen sind. Durch einfache Umformung des letzteren Ausdruckes gelangt man zu dem Resultate

$$\Delta = -a^2b^2(a^2M^2 + b^2 - n^2),$$

wonach, da a^2b^2 immer positiv sein muß, die Unterscheidung der drei Fälle einzig davon abhängt, ob die Differenz

$$a^2M^2 + b^2 - n^2$$

*) Um Verwechselungen mit den Konstanten der Ellipse zu vermeiden, ist die Richtungskonstante der Geraden mit M und die Ordinate ihres in der y-Achse gelegenen Punktes mit n bezeichnet worden.

positiv, gleich Null oder negativ ist. Im ersteren Falle stellt die Gerade eine Sekante, im zweiten eine Tangente der Ellipse dar; im dritten sind keine gemeinschaftlichen Punkte vorhanden.

Um dem gefundenen Unterscheidungsmerkmale eine geometrische Deutung abzugewinnen, wollen wir uns zunächst auf den einfachen und praktisch wichtigsten Fall beschränken, wo die angegebene Differenz gleich Null ist, die Gerade also den Charakter einer Tangente an sich trägt. Das hierfür geltende analytische Kennzeichen

4) $$a^2 M^2 + b^2 = n^2$$

kommt, wenn man mittels der Gleichung

$$b^2 = a^2 - c^2$$

die lineare Exzentrizität c einführt, auf die Form:

$$a^2(1 + M^2) = c^2 + n^2.$$

Bezeichnen wir nun mit α den von der Geraden und der x-Achse eingeschlossenen Winkel, so ist bekanntlich

$$1 + M^2 = \sec^2\alpha,$$

und es entsteht hiermit aus der vorhergehenden Gleichung:

$$a^2 \sec^2\alpha = c^2 + n^2$$

oder:

5) $$a^2 = (c\cos\alpha)^2 + (n\cos\alpha)^2.$$

Um diese Gleichung zu deuten, ist in Fig. 42 $CF = c$ gesetzt, indem C den Mittelpunkt und F einen Brennpunkt der Ellipse darstellt. TV ist die zu untersuchende Tangente, also $CN = n$. Zieht man CU und FV senkrecht auf TV, so wird

$$UV = c\cos\alpha, \quad CU = n\cos\alpha;$$

Fig. 42.

folglich erhält man aus 5):

$$a^2 = UV^2 + CU^2 = CV^2, \quad a = CV.$$

Der Fußpunkt V des vom Brennpunkte F auf die Tangente gefällten Lotes oder die Projektion des Brennpunktes auf die Tangente liegt hiernach im Abstande a vom Mittelpunkte der Ellipse, d. i. auf dem Umfange des umgeschriebenen Kreises.

Untersucht man in gleicher Weise die beiden noch übrigen Fälle, was durch bloße Vertauschung der Gleichheits- und Ungleichheitszeichen in den letzten Formeln geschehen kann, so gelangt man zu dem Satze: Eine Gerade schneidet eine Ellipse in zwei Punkten, berührt sie in einem Punkte oder hat keinen Punkt mit ihr gemein, je nachdem die Projektionen der Brennpunkte auf die Gerade innerhalb, auf oder außerhalb der Peripherie des über der großen Achse beschriebenen Kreises liegen. — Durch Umkehrung dieses Satzes kommt man unter anderem zu dem Resultate, daß, wenn man auf einer Ellipsentangente in den beiden Punkten, worin sie den umgeschriebenen Kreis schneidet, Senkrechte errichtet, jede dieser Senkrechten durch einen der beiden Brennpunkte hindurchgehen muß.

Tangenten der Ellipse. Die auf Tangenten bezüglichen Grundaufgaben, eine Berührende in gegebener Richtung oder durch einen gegebenen Punkt an eine Ellipse zu legen, können leicht geometrisch mit Hilfe des umgeschriebenen Kreises nach dem obigen Lehrsatze gelöst werden. Die analytische Behandlung dieser Aufgaben stützt sich auf die Bedingungsgleichung 4), welche das Kennzeichen für den Fall enthält, in welchem eine Gerade zur Tangente der Ellipse wird.

Soll erstens eine Gerade, deren Richtungskonstante den Wert M besitzt, die Ellipse berühren, so gelten für diesen Fall die Gleichungen:

$$y = Mx + n, \quad a^2M^2 + b^2 = n^2,$$

aus denen die unbekannte Konstante n eliminiert werden kann. Es folgt dann als Gleichung der Tangente bei gegebener Richtung:

6) $$y = Mx \pm \sqrt{a^2M^2 + b^2}.$$

Da hierin die Wurzelgröße nicht verschwinden kann, so sind nach jeder Richtung hin zwei parallele Tangenten möglich, welche mit Rücksicht auf die Form von Gleichung 6) die y-Achse zu beiden Seiten des Mittelpunktes in gleichem Abstande durchschneiden. Was die Koordinaten der zugehörigen Berührungspunkte betrifft, so ergeben sich dieselben aus den Resultaten der folgenden Aufgabe.

Wird nämlich zweitens die Forderung gestellt, durch einen gegebenen Punkt $x_1 y_1$ Tangenten an die Ellipse zu legen, so läuft unter Beibehaltung der vorigen Bezeichnungen diese Aufgabe darauf hinaus, M und n zu berechnen, wenn x_1 und y_1 gegeben sind. Die hierzu nötigen Bedingungsgleichungen können aber ebenfalls benutzt werden, um die Werte von x_1 und y_1 aus M und n abzuleiten.

Mit Rücksicht auf die gestellten Bedingungen, daß die Gerade mit den Konstanten M und n Tangente sein und auf ihr der Punkt $x_1 y_1$ liegen soll, gelten die Gleichungen:

$$a^2 M^2 + b^2 = n^2, \quad y_1 = M x_1 + n,$$

woraus durch Entfernung von n die zur Berechnung von M dienende Gleichung

7) $$(a^2 - x_1^2) M^2 + 2 x_1 y_1 M + (b^2 - y_1^2) = 0$$

entsteht. Die Konstante n, welche einem jeden hieraus berechneten M zugehört, ergibt sich aus

8) $$n = y_1 - M x_1.$$

Die Form von Nr. 7) zeigt, daß durch den gegebenen Punkt entweder zwei Tangenten gelegt werden können, oder nur eine oder endlich keine möglich ist, je nachdem

$$x_1^2 y_1^2 \gtreqless (a^2 - x_1^2)(b^2 - y_1^2)$$

oder auch

$$a^2 y_1^2 + b^2 x_1^2 \gtreqless a^2 b^2,$$

und es geht aus der zu Nr. 3) im § 20 gemachten Bemerkung hervor, daß diese zu unterscheidenden Fälle darauf hinauskommen, ob der gegebene Punkt außerhalb, auf der Peripherie oder innerhalb der Ellipse gelegen ist.

Fassen wir zunächst den Fall ins Auge, wo sich der Punkt $x_1 y_1$ auf der Peripherie befindet, also den Berührungspunkt abgibt, so erhalten wir aus Nr. 7) auf sehr einfache Weise die Richtung der Tangente, wenn wir vor allen Dingen diese Gleichung mit $a^2 b^2$ multiplizieren. In dem hieraus entstehenden Resultate

$$a^2 b^2 (a^2 - x_1^2) M^2 + 2 a^2 b^2 x_1 y_1 M + a^2 b^2 (b^2 - y_1^2) = 0$$

kann nämlich, wenn $x_1 y_1$ Peripheriepunkt ist, nach der Ellipsengleichung 1)

9*

$$b^2(a^2 - x_1^2) = a^2 y_1^2, \quad a^2(b^2 - y_1^2) = b^2 x_1^2$$

gesetzt werden, und man erhält hieraus:

$$a^4 y_1^2 M^2 + 2a^2 b^2 x_1 y_1 M + b^4 x_1^2 = 0$$

oder nach Wurzelausziehung und Reduktion auf M:

9) $$M = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

Aus dieser für die Richtungskonstante der Tangente im Berührungspunkte $x_1 y_1$ geltenden Gleichung folgt unter anderem, daß, so lange M einen gegebenen Wert besitzt, auch der Quotient $\frac{y_1}{x_1}$ konstant bleiben muß, wonach sich mit Rücksicht auf die Gleichung 1) im § 5 die Berührungspunkte paralleler Tangenten, deren es nach dem Resultate der vorigen Aufgabe je zwei gibt, auf einer durch den Mittelpunkt der Ellipse (den Koordinatenanfang) gehenden Geraden befinden.

Wird das Ergebnis von Nr. 9) in 8) eingesetzt, so findet sich bei neuer Reduktion mit Hilfe der Ellipsengleichung:

10) $$n = \frac{b^2}{y_1}.$$

Die Gleichungen 10) und 9) sind auf y_1 und x_1 zu reduzieren, wenn aus den Konstanten einer gegebenen Tangente die Koordinaten des Berührungspunktes abgeleitet werden sollen. Die Ausführung hiervon kann der Selbstübung des Lesers überlassen bleiben.

Durch Einsetzung der in 9) und 10) gefundenen Werte in die Gleichung der Geraden ergibt sich für die Gleichung der durch den Berührungspunkt $x_1 y_1$ gehenden Tangente:

$$y = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \cdot x + \frac{b^2}{y_1},$$

woraus nach gehöriger Reduktion

11) $$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

hergeleitet wird. Für die Abscisse des in der x-Achse gelegenen Punktes, die wir mit m bezeichnen wollen, folgt hieraus:

12) $$m = \frac{a^2}{x_1}.$$

Die Werte 10) und 12) sind besonders zur geometrischen Darstellung der Tangente geeignet. Da nämlich m nur von a und x_1 abhängt, so müssen in allen über derselben großen Achse konstruierten Ellipsen die Berührenden solcher Punkte, die eine gleiche Abscisse besitzen, die x-Achse in demselben Punkte schneiden; es gilt dies also auch, da die kleine Achse ganz außer dem Spiele bleibt, für die Tangente im umgeschriebenen Kreise. In gleicher Weise wird mit Rücksicht auf Nr. 10) die y-Achse bei gleich bleibender Ordinate der Berührungspunkt von den Tangenten aller über derselben kleinen Achse befindlichen Ellipsen in demselben Punkte geschnitten, also auch von der Tangente im eingeschriebenen Kreise. Hiernach kann die Darstellung der Tangente leicht mit der in Fig. 39 enthaltenen Konstruktion der Ellipse aus den über den Achsen beschriebenen Kreisen in Verbindung gebracht werden.

Befindet sich der Punkt $x_1 y_1$, durch welchen Berührende an die Ellipse gelegt werden sollen, außerhalb der Peripherie, so führt eine gleiche Schlußfolgerung, wie die zur Herleitung von Nr. 5) im § 10 und Nr. 13) im § 16 angestellte, zu dem Resultate, daß

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

die Gleichung der Berührungssehne darstellt. Hiermit läßt sich in ähnlicher Weise, wie es bei den Tangenten geschah, die Berührungssehne in der Ellipse mit den entsprechenden Linien im umgeschriebenen und im eingeschriebenen Kreise in Zusammenhang bringen.

Normalen der Ellipse. Für die Normale im Ellipsenpunkte $x_1 y_1$ ergibt sich mittels der in Nr. 9) gefundenen Richtungskonstante der hierzu senkrechten Tangente die Gleichung:

13) $$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Wird hierin $y = 0$ gesetzt, so entsteht, wenn wir die zugehörige Abscisse mit ξ bezeichnen, für die **Subnormale** der Wert:

14) $$\xi - x_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2},$$

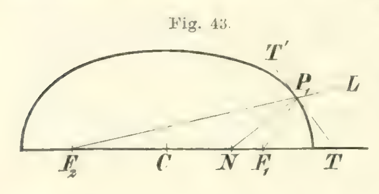
und hieraus für ξ selbst mit Einführung der numerischen Exzentrizität nach bekannten Reduktionsformeln:

15) $$\xi = \varepsilon^2 x_1.$$

Hieraus wird unter Berücksichtigung des Umstandes, daß die x aller Ellipsenpunkte zwischen den Grenzen $+a$ und $-a$ enthalten sind, leicht abgeleitet, daß die große Achse von jeder Normale zwischen den beiden Punkten $\xi = \pm e^2 : a$ und zwar, von der kleinen Achse aus gerechnet, auf derselben Seite geschnitten wird, auf welcher sich der zugehörige Ellipsenpunkt befindet.

Sind nun in Fig. 43 F_1 und F_2 die beiden Brennpunkte, ist ferner C der Mittelpunkt der Ellipse und P_1N die Normale des Punktes P_1, so hat man $\xi = CN$, und hiernach folgt für die Abstände des Punktes N von den beiden Brennpunkten:

Fig. 43.



$$NF_1 = e - \xi = \varepsilon(a - \varepsilon x_1),$$
$$F_2N = e + \xi = \varepsilon(a + \varepsilon x_1).$$

Mit Rücksicht auf die im § 20 unter 17) und 18) gefundenen Längen der Brennstrahlen P_1F_1 und P_1F_2 ist also

$$NF_1 = \varepsilon \cdot P_1F_1, \quad F_2N = \varepsilon \cdot F_2P_1.$$

Dies gibt die Proportion:

16) $$F_2N : NF_1 = F_2P_1 : P_1F_1,$$

woraus nach einem bekannten geometrischen Satze geschlossen wird, daß die Normale P_1N den Winkel $F_2P_1F_1$ halbiert*). Man erhält so den Satz: Die Normale eines jeden Ellipsenpunktes bildet mit den zugehörigen Brennstrahlen gleiche Winkel. Geometrisch wird hieraus abgeleitet, daß die Tangente $T'T$ den Winkel F_1P_1L halbiert, welchen ein Brennstrahl mit der Verlängerung des anderen einschließt. Zu demselben Resultate gelangt

*) Setzt man $\angle NP_1F_1 = \gamma_1$, $\angle F_2P_1N = \gamma_2$, $\angle P_1NF_1 = \nu$, so gelten die Proportionen:

$$\sin\gamma_1 : \sin\nu = NF_1 : P_1F_1,$$
$$\sin\gamma_2 : \sin\nu = F_2N : F_2P_1.$$

Hieraus folgt

$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = \frac{F_2N}{NF_1} : \frac{F_2P_1}{P_1F_1},$$

also mit Rücksicht auf 16):

$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = 1, \quad \sin\gamma_2 = \sin\gamma_1 \text{ u. s. f.}$$

man durch Berechnung der Strecken $F_2 T$ und $F_1 T$ mit Hilfe von Nr. 12): dieselben stehen ebenfalls im Verhältnis der Brennstrahlen.

Die Länge der Normale $P_1 N$, die wir mit n bezeichnen wollen, findet sich aus der Formel:

$$n^2 = (x_1 - \xi)^2 + y_1^2.$$

Mit Benutzung des obigen Wertes von ξ und der für $x_1 y_1$ geltenden Ellipsengleichung erhält man hieraus nach einfachen Reduktionen:

17) $$n^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)$$

oder, wenn man für die Brennstrahlen $P_1 F_1$ und $F_2 P_1$ die bereits im § 20 angewendeten Bezeichnungen z_1 und z_2 gebraucht,

18) $$n^2 = \frac{b^2}{a^2} \cdot z_1 z_2 .$$

Hieraus kann eine einfache Formel für die Größe des Winkels abgeleitet werden, welchen die Normale mit jedem der Brennstrahlen einschließt, und den wir mit γ bezeichnen wollen. Nach einem bekannten trigonometrischen Satze erhält man nämlich im Dreieck $F_2 P_1 F_1$ Fig. 43, dessen drei Seiten gleich z_2, z_1 und $2c$ sind,

$$\cos^2\gamma = \frac{(z_1 + z_2 + 2c)(z_1 + z_2 - 2c)}{4 z_1 z_2},$$

also mit Rücksicht auf § 20 Nr. 19) und § 14 Nr. 9)

$$\cos^2\gamma = \frac{b^2}{z_1 z_2} .$$

Wird diese Gleichung durch Multiplikation mit Nr. 18) verbunden, so entsteht das Resultat:

$$n^2 \cos^2\gamma = \frac{b^4}{a^2},$$

oder nach § 14 Nr. 6), bei Beachtung des Umstandes, daß nur positive Werte von $\cos\gamma$ in Frage kommen können,

19) $$n \cos\gamma = p,$$

wobei p den Halbparameter darstellt. Nach dieser Formel kann der Winkel γ leicht berechnet werden; zugleich ist darin der Lehrsatz enthalten: In der Ellipse gibt die Projektion der Nor-

male auf einen Brennstrahl des zugehörigen Peripheriepunktes den Halbparameter*).

§ 22. Fortsetzung.

Durchmesser der Ellipse. Wir sind berechtigt, die Gleichung 3) des vorigen Paragraphen durch $a^2 M^2 + b^2$ zu dividieren, weil dieser Wert immer von Null verschieden sein muß. Dann entsteht für die Abscissen derjenigen Punkte, welche die in Untersuchung stehende Gerade mit der Ellipse gemein hat, die Gleichung:

$$1)\qquad x^2 + 2\cdot\frac{a^2 M n}{a^2 M^2 + b^2}\cdot x + \frac{a^2 n^2 - b^2}{a^2 M^2 + b^2} = 0.$$

Angenommen nun, die Ellipse werde von der Geraden in zwei reellen Punkten geschnitten und es seien x und y die Koordinaten des Mittelpunktes der zwischen den beiden Durchschnittspunkten enthaltenen Sehne, so ist

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

wenn unter x_1 und x_2 die Wurzeln der obigen Gleichung und unter y_1 und y_2 die zugehörigen Ordinaten verstanden werden. Mit Rücksicht auf die Summe der Wurzeln von Nr. 1) und auf die Gleichung der Geraden ergibt sich:

$$2)\qquad x = -\frac{a^2 M n}{a^2 M^2 + b^2}, \quad y = Mx + n.$$

Hieraus erhält man durch Entfernung von n für die Mitten einer Schar paralleler Sehnen (mit der gemeinschaftlichen Richtungskonstante M) die Gleichung:

$$3)\qquad a^2 M y + b^2 x = 0,$$

aus deren geometrischer Deutung sich der Lehrsatz ergibt: Die Mitten aller parallelen Sehnen einer Ellipse liegen in

*) Da sich dieser Satz unabhängig von der Größe der Achsen zeigt, so muß er auch für die Parabel gelten, von der wir früher (vgl. die aus der Zusammenstellung der Gleichungen unter Nr. 16) im § 14 gezogenen Folgerungen) gesehen haben, daß sie als Ellipse mit unendlicher großer Achse aufgefaßt werden kann. Ohne alle Rechnung ergibt sich übrigens für die Parabel dieselbe Eigenschaft aus der Größe der Subnormale mittels der zu Fig. 34 angestellten Betrachtungen.

einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden. Die Kurve besitzt also geradlinige Durchmesser, die sich sämtlich im Mittelpunkte schneiden, und es kann hiernach dieser Punkt mittels des Durchschnittes zweier Geraden konstruiert werden, von denen jede zwei parallele Sehnen halbiert. Bei einer vollständig gegebenen Ellipse reicht übrigens hierzu bereits die Konstruktion eines einzigen Durchmessers hin, da dessen Mitte mit dem Mittelpunkte zusammenfallen muß.

Bringen wir Nr. 3) auf die Form

$$y = -\frac{b^2}{a^2 M}x,$$

so findet sich für die Richtungskonstante des Durchmessers, die wir mit M' bezeichnen wollen, die Gleichung:

$$M' = -\frac{b^2}{a^2 M},$$

oder auch:

$$4)\qquad MM' = -\frac{b^2}{a^2},$$

d. h. die Richtungskonstanten eines beliebigen Systems paralleler Sehnen und ihres zugehörigen Durchmessers bilden für jede Ellipse ein unveränderliches Produkt. Da hierbei, unbeschadet der Richtigkeit der Gleichung, die Faktoren M und M' ihre Rollen austauschen können, so folgt, daß, wenn man den Sehnen die Richtung des zugehörigen Durchmessers gibt, letzterer die Richtung der Sehnen annimmt. Legt man also zu den Sehnen, welche von einem Durchmesser halbiert werden, eine Parallele durch den Mittelpunkt, so ist diese Parallele selbst wieder Durchmesser für diejenigen Sehnen, welche mit dem ersten gleiche Richtung haben. Zwei in der angegebenen Weise von einander abhängige Durchmesser heißen zugeordnete oder konjugierte Durchmesser. Einer derselben kann immer in beliebiger Richtung durch den Mittelpunkt der Ellipse gelegt werden; man findet dann den andern, wenn man den Halbierungspunkt einer dazu parallelen Sehne geradlinig mit dem Mittelpunkte verbindet. Ebenso folgt, daß, wenn man durch den Mittelpunkt zwei Gerade so legt, daß von jeder eine zu der andern parallele Sehne halbiert wird, diese Geraden konjugierte Durchmesser sein müssen. Man erreicht dies z. B., wie leicht geometrisch nachgewiesen werden kann, wenn man durch den

Mittelpunkt Parallelen zu zwei Sehnen zieht, welche die Enden eines Durchmessers mit einem beliebigen Punkte der Ellipse verbinden. Sehnen dieser Art werden Supplementarsehnen genannt; man erhält also den Satz: Durchmesser der Ellipse, die mit zwei Supplementarsehnen parallel laufen, sind konjugiert.

Die beiden Achsen der Ellipse sind als ein spezieller Fall der konjugierten Durchmesser zu betrachten, und zwar als der einzige, wo diese Linien senkrecht aufeinander stehen. Für jeden andern Fall gilt nämlich, wenn mit α und β die in der Drehrichtung der Polarwinkel gemessenen Winkel bezeichnet werden, welche die Richtung der beiden Durchmesser gegen die Achse der positiven x bezeichnet, nach 4) die Gleichung:

$$5) \qquad \tan\alpha \cdot \tan\beta = -\frac{b^2}{a^2}\cdot$$

Bei rechtwinkliger Lage müßte das darin enthaltene Produkt zu -1 werden, was bei Ausschließung des vorerwähnten speziellen Falles, in welchem das Produkt der beiden Winkeltangenten die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ annimmt, allgemein nur möglich ist, wenn $b = a$, d. h. wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht. — Die Bemerkung, daß die beiden Achsen den einzigen Fall darstellen, in welchem konjugierte Durchmesser einen rechten Winkel einschließen, gewährt ein einfaches Mittel, in einer Ellipse mit gegebenem Mittelpunkte die Lage der Achsen zu bestimmen. Beschreibt man nämlich über einem Durchmesser einen die Ellipse schneidenden Halbkreis und verbindet den Durchschnittspunkt geradlinig mit den Enden des Durchmessers, so erhält man zwei aufeinander senkrechte Supplementarsehnen; die hierzu parallelen Durchmesser sind also die beiden Achsen.

Das in Nr. 5) rechter Hand befindliche Vorzeichen weist darauf hin, daß von den Winkeln α und β der eine immer spitz, der andere stumpf sein muß, daß also jeder der beiden Durchmesser von den vier Quadranten der Ellipse zwei gegenüberliegende durchschneidet. Verstehen wir nun unter α den spitzen dieser beiden Winkel, so ist $\beta - \alpha$ der von der kleinen Achse durchschnittene Winkel, welcher die beiden Durchmesser zu Schenkeln hat; in die Nebenwinkel des letzteren fällt die große Achse. Bezeichnen wir dieses Supplement von $\beta - \alpha$ mit ω, so ist

$$\tan\omega = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\cdot\tan\beta},$$

und es folgt hieraus, wenn mit Hilfe von Nr. 5) der Winkel β eliminiert wird,

6) $$\tan\omega = \frac{a^2\tan\alpha + b^2\cot\alpha}{a^2 - b^2}.$$

Da dieser Wert immer positiv ist, so zeigt sich, daß von den beiden durch die konjugierten Durchmesser begrenzten Nebenwinkeln der stumpfe von der kleinen und der spitze von der großen Achse durchschnitten wird. Der letztere (in unserer Bezeichnung ω) führt den Namen: Konjugationswinkel. Für die Größe desselben gilt die Formel 6), woraus nach goniometrischen Sätzen das Resultat

$$\sin^2\omega = \frac{(a^2\tan\alpha + b^2\cot\alpha)^2}{(a^2 - b^2)^2 + (a^2\tan\alpha + b^2\cot\alpha)^2},$$

oder nach einfacher Umformung

7) $$\sin^2\omega = \frac{(a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha)^2}{a^4\sin^2\alpha + b^4\cos^2\alpha}$$

abgeleitet wird. Die letztere Formel wird später dazu dienen, die Größe des Konjugationswinkels von den Längen der Durchmesser abhängig zu machen.

Die konjugierten Durchmesser lassen sich noch in eine einfache Beziehung zu den Tangenten der Ellipse bringen, wenn man auf Nr. 3 zurückgeht. Reduziert man nämlich auf M, so entsteht:

8) $$M = -\frac{b^2x}{a^2y},$$

wobei x und y als Koordinaten des Sehnenmittelpunktes einen Punkt des der Sehne konjugierten Durchmessers anzeigen. Da der Durchmesser mit dem Punkte xy durch den Koordinatenanfang geht, so gilt, wenn wir mit x_1 und y_1 die Koordinaten eines der beiden Punkte bezeichnen, worin er die Ellipse schneidet, die Proportion:

$$x : x_1 = y : y_1,$$

durch deren Anwendung Nr. 8 in die Formel 9) des vorhergehenden Paragraphen übergeführt werden kann. Da durch diese Formel die Richtung der Tangente im Punkte x_1y_1 bestimmt wurde, so folgt der Satz: Jeder Durchmesser der Ellipse läuft parallel

mit den Tangenten der in seinem konjugierten Durchmesser gelegenen Ellipsenpunkte*). Hiernach ist es leicht, eine Tangente mittels des durch ihren Berührungspunkt gehenden Durchmessers zu konstruieren, indem man die Richtung des hierzu konjugierten Durchmessers ermittelt.

Legt man durch den Mittelpunkt der Ellipse ein schiefwinkliges Koordinatensystem, dessen Achsen mit zwei konjugierten Durchmessern zusammenfallen, so müssen nach der Eigenschaft dieser Linien jedem Werte der einen Koordinate Doppelwerte der andern Koordinate von gleicher Größe und entgegengesetzten Vorzeichen zugehören; die auf dieses System bezogene Gleichung der Ellipse muß daher wieder in Beziehung auf x sowohl, als auf y rein quadratisch sein. Wir können diese Bemerkung durch Anwendung der Änderungsformeln bestätigen. Sind α und β die Winkel, welche der Reihe nach in der im § 4 zu Fig. 11 festgestellten Drehrichtung die neue x- und y-Achse mit der großen Achse der Ellipse bilden, so ist beim Übergange zum neuen Systeme nach Nr. 2) des angeführten Paragraphen der Koordinatenwinkel $\omega = 90^0$, und daher

$$x \cos\alpha + y \cos\beta \text{ für } x$$
$$x \sin\alpha + y \sin\beta \quad ,, \quad y$$

zu setzen. Man erhält dann als Gleichung der Ellipse:

$$\left(\frac{x\cos\alpha + y\cos\beta}{a}\right)^2 + \left(\frac{x\sin\alpha + y\sin\beta}{b}\right)^2 = 1,$$

und hieraus nach einfachen Umformungen:

$$\frac{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}{a^2b^2}\cdot x^2 + \frac{a^2\sin^2\beta + b^2\cos^2\beta}{a^2b^2}\cdot y^2$$
$$+ 2\cdot\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta + b^2\cos\alpha\cos\beta}{a^2b^2}\cdot xy = 1.$$

Aus Nr. 5) ergibt sich, daß für konjugierte Durchmesser als Koordinatenachsen der Zähler des letzten Bruches zu Null wird. Gebraucht man daher noch die Abkürzungen:

*) Veranschaulicht wird dieser Satz durch parallele Verschiebung der Sehne, wobei, wenn schießlich beide Endpunkte zusammenfallen, die Gerade, von welcher die Sehne eine begrenzte Strecke darstellte, in eine Tangente übergeht.

$$9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{a_1^{\,2}} &= \frac{a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha}{a^2 b^2}, \\ \frac{1}{b_1^{\,2}} &= \frac{a^2 \sin^2\beta + b^2 \cos^2\beta}{a^2 b^2}, \end{aligned}\right.$$

so bleibt die auf zwei konjugierte Durchmesser bezogene Ellipsengleichung:

$$10)\quad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1.$$

Die Vergleichung der Formeln 9) mit der im § 20 Nr. 3) aufgestellten Polargleichung der Ellipse zeigt, daß hierin a_1 und b_1 die in den Koordinatenachsen gelegenen Halbmesser darstellen. Bestätigt wird diese Bemerkung, wenn wir in Nr. 10) eine der beiden Koordinaten zu Null werden lassen.

Aus der Übereinstimmung der Form von Nr. 10) mit der auf die beiden Achsen der Ellipse bezüglichen Gleichung dieser Kurve folgt, daß alle aus dieser Form entnommenen Schlußfolgerungen, soweit sie von der rechtwinkligen Lage des Koordinatensystems unabhängig bleiben, auch dann noch Anwendung finden, wenn bei schiefwinkligem Koordinatensystem die Achsen die Rolle konjugierter Durchmesser spielen. Was z. B. die im § 20 gegebenen Konstruktionen der Ellipse betrifft, so kann die in Fig. 41 dargestellte unverändert beibehalten werden, wenn man das mit den Halbachsen gebildete Rechteck gegen ein über zwei konjugierten Halbmessern beschriebenes Parallelogramm austauscht. Auch alle übrigen Konstruktionen lassen sich auf die konjugierten Durchmesser übertragen, wenn man anfangs eine Ellipse mit den Halbachsen a_1 und b_1 bildet und dann die den einzelnen Abscissen zugehörigen Ordinaten durch Drehung um die mit der x-Achse gebildeten Durchschnittspunkte in die nötige schiefe Lage überführt. Ebenso behalten die auf die Tangentengleichung bezüglichen Entwickelungen, insofern man von der goniometrischen Deutung der Richtungskonstante absieht, ihre volle Geltung. Die Gleichung

$$11)\quad \frac{x_1 x}{a_1^{\,2}} + \frac{y_1 y}{b_1^{\,2}} = 1$$

stellt wieder die Gleichung der Tangente im Berührungspunkte $x_1 y_1$ dar, oder gehört der Berührungssehne an, wenn der Punkt $x_1 y_1$ außerhalb der Ellipse gelegen ist.

Formeln von bemerkenswerter Einfachheit ergeben sich, wenn man die exzentrischen Anomalien (§ 20) φ und ψ der Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser beachtet. Sind x_1 und y_1 die rechtwinkligen Koordinaten des Endpunktes des ersten Ellipsendurchmessers, x_2 und y_2 die des andern, bezogen auf die Achsen, so ist

$$x_1 = a\cos\varphi, \qquad y_1 = b\sin\varphi,$$
$$x_2 = a\cos\psi, \qquad y_2 = b\sin\psi.$$

Hieraus und aus der Gleichung 5) folgt

$$\tan\varphi\cdot\tan\psi = -1,$$

und dies ergibt

12) $$\psi = \varphi + 90^0.$$

Man hat daher den Satz: Die exzentrischen Anomalien der Endpunkte zweier konjugierter Durchmesser unterscheiden sich um einen rechten Winkel. Die Koordinaten x_2 und y_2 kann man hiernach durch φ ausdrücken und erhält

13) $$\begin{cases} x_1 = a\cos\varphi, & y_1 = b\sin\varphi, \\ x_2 = -a\sin\varphi, & y_2 = b\cos\varphi. \end{cases}$$

Für die Strecken a_1 und b_1 ergibt sich

14) $$\begin{cases} a_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi, \\ b_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi. \end{cases}$$

Aus 13) folgen die Gleichungen

$$\tan\alpha = \frac{y_1}{x_1} = \frac{b}{a}\cdot\tan\varphi,$$

$$\sin\alpha = \frac{b\sin\varphi}{a_1}, \qquad \cos\alpha = \frac{a\cos\varphi}{a_1},$$

$$a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha = \frac{a^2b^2}{a_1^2},$$

$$a^4\sin^2\alpha + b^4\cos^2\alpha = \frac{a^2b^2}{a_1^2}(a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi) = a^2b^2\cdot\frac{b_1^2}{a_1^2}.$$

Daher erhält man aus 7) für den Sinus des Konjugationswinkels

$$\sin^2\omega = \frac{a^2b^2}{a_1^2b_1^2}.$$

Hieraus folgt

15) $$a_1b_1\sin\omega = ab.$$

Dies gibt unter anderm die geometrische Deutung: In einer Ellipse sind alle Parallelogramme, welche entstehen,

wenn man die Endpunkte irgend zweier konjugierter Durchmesser geradlinig verbindet, flächengleich.

Durch Addition der Gleichungen 14) folgt ferner

16) $$a_1^2 + b_1^2 = a^2 + b^2,$$

d. h. in einer Ellipse ist die Summe der Quadrate irgend **zweier konjugierter Halbmesser konstant.**

Die Unveränderlichkeit der Summe $a_1^2 + b_1^2$ zeigt, daß das Produkt $a_1^2 b_1^2$, also auch $a_1 b_1$ möglichst groß und damit nach Nr. 15) der Sinus des Konjugationswinkels möglichst klein werden muß, wenn die beiden konjugierten Durchmesser gleich lang sind. Mit Rücksicht auf die Ausdrücke 9) findet sich leicht, daß dies nur vorkommen kann, wenn $\beta = 180^0 - \alpha$, d. h. wenn die große Achse den Konjugationswinkel halbiert. Aus

$$\tan\beta = -\tan\alpha \quad \text{und} \quad \tan g\,\alpha \cdot \tan\beta = -\frac{b^2}{a^2}$$

folgt dann, wenn wir immer noch unter α den spitzen Winkel verstehen,

17) $$\tan\alpha = \frac{b}{a}\cdot$$

Die Diagonalen eines Rechteckes, dessen Seiten die Tangenten der Achsenscheitel bilden, enthalten hiernach die gleichen konjugierten Durchmesser und schließen den kleinsten in der Ellipse möglichen Konjugationswinkel ein. Bezeichnen wir mit k einen der gleichen Halbmesser, so ergibt sich aus 16):

18) $$k^2 = \frac{a^2 + b^2}{2},$$

und für den zugehörigen kleinsten Konjugationswinkel folgt

19) $$\sin\omega = \frac{2ab}{a^2 + b^2},$$

ein Wert, der leicht mittels der Form 17) durch Berechnung von $\sin 2\alpha$ bestätigt werden kann. — Die auf die gleichen Durchmesser als Koordinatenachsen bezogene Ellipsengleichung lautet nach 10):

20) $$x^2 + y^2 = k^2,$$

ist also mit der auf zwei im Mittelpunkte sich rechtwinklig schneidende Koordinatenachsen bezogenen Kreisgleichung identisch, nur

daß sie bei der Ellipse für ein einziges Koordinatensystem, und zwar für ein schiefwinkliges, Geltung findet.

Mit Hilfe der Gleichungen 15) und 16) können irgend zwei der darin enthaltenen fünf Größen berechnet werden, wenn die drei andern gegeben sind; man kann daher z. B. aus zwei nach Lage und Größe bestimmten konjugierten Durchmessern die Achsen finden. Am leichtesten gelangt man hierbei zum Ziele, wenn man Summe und Differenz der beiden Halbachsen als Unbekannte betrachtet. Aus der Verbindung der beiden gegebenen Gleichungen entstehen nämlich die Formeln:

$$(a+b)^2 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2} + 2a_1 b_1 \sin\omega,$$
$$(a-b)^2 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2} - 2a_1 b_1 \sin\omega.$$

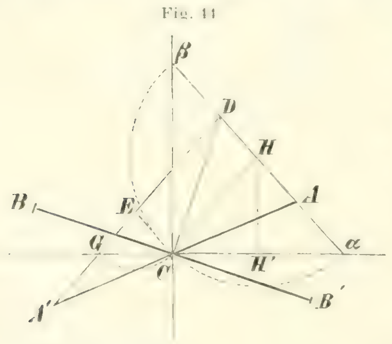
oder:

$$21)\qquad \begin{cases} (a+b)^2 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2} - 2a_1 b_1 \cos(90^0 + \omega), \\ (a-b)^2 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2} - 2a_1 b_1 \cos(90^0 - \omega). \end{cases}$$

Diese Ausdrücke lassen eine einfache geometrische Konstruktion zu, da die rechter Hand stehenden Werte mit Hilfe zweier Dreiecke dargestellt werden können, für deren jedes zwei Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind. Stellen nämlich $CA = A'C = a_1$ und $CB = B'C = b_1$ in Fig. 44 die konjugierten Durchmesser dar, welche den Konjugationswinkel $ACB' = \omega$ einschließen, so errichte man $CD = CB$ senkrecht auf BB'; dann ist $AD = a - b$ und $A'D = a + b$. Zieht man nun $CE \perp AD$, so wird

$$CE = \frac{a-b}{2}, \quad ED = \frac{a+b}{2},$$

Fig. 44



folglich, wenn man $GE = CE$ nimmt, $GD = a$, $A'G = b$.

Werden die Koordinaten von D in Bezug auf die Hauptachsen mit $x_3 y_3$ bezeichnet, so ist, weil CD normal auf BC und gleich BC ist (Nr. 13):

$$22)\qquad \begin{cases} x_3 = y_2 = b\cos\varphi, \\ y_3 = -x_2 = -a\sin\varphi. \end{cases}$$

Für den Mittelpunkt H der Strecke AD ergeben sich daher die Koordinaten und der Abstand vom Zentrum

$$23) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{2}(a+b)\cos\varphi, \quad \eta = \frac{1}{2}(a+b)\sin\varphi, \\ CH = \sqrt{\xi^2+\eta^2} = \frac{1}{2}(a+b). \end{cases}$$

Die einfachen Werte für x_1, y_1, x_3, y_3 veranlassen, die Ausdrücke zu bilden, durch welche die Strecken $C\alpha$ und $C\beta$ bestimmt sind, die die Gerade AD von den Achsen abschneidet. Nach den im § 5 Nr. 11) enthaltenen Formeln ist

$$C\alpha = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{y_1 - y_3}, \quad C\beta = \frac{y_3 x_1 - x_3 y_1}{x_1 - x_3}.$$

Setzt man hier die in Nr. 13) und 22) gegebenen Werte ein, so erhält man

$$C\alpha = (a+b)\cos\varphi, \quad C\beta = (a+b)\sin\varphi.$$

Vergleicht man dies mit Nr. 23), so erkennt man, daß

$$\alpha H = H\beta = CH.$$

Die Hauptachsen gehen daher durch die Punkte, in welchen der um H beschriebene, C enthaltende Kreis die Gerade AD schneidet.

§ 23. Die Krümmungskreise der Ellipse.

Bei Untersuchung der möglichen gegenseitigen Lagen der Ellipse und eines Kreises, deren Gleichungen beiderseits dem zweiten Grade angehören, ergibt sich in gleicher Weise, wie bei der entsprechenden auf Parabel und Kreis bezüglichen Betrachtung (§ 18), eine Gleichung vierten Grades, aus deren Wurzeln die gemeinschaftlichen Punkte beider Linien zu entnehmen sind. Beschränkt man sich hierbei wieder auf den besonders wichtigen Fall, wo drei dieser Punkte zusammenfallen, also die Gleichung drei gleiche Wurzeln enthält und der Kreis nach den im § 18 aufgestellten Begriffen die Bedeutung des Krümmungskreises enthält, so gelangt man jedoch einfacher als durch Diskussion der Gleichung vierten Grades zur Bestimmung des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes, wenn man auf Grund der an der angegebenen Stelle gewonnenen Begriffe diesen Punkt als den Grenzort auffaßt, in welche der Durchschnittspunkt der Normalen zweier Ellipsenpunkte übergeht, wenn die letzteren in einen einzigen zusammenschwinden. Von dieser Auffassung aus ergibt sich der folgende Rechnungsgang.

Nehmen wir die beiden Achsen der Ellipse in der früheren Weise als Koordinatenachsen an, so lautet nach § 21 Nr. 13) die Gleichung der Normale im Ellipsenpunkte $x_1 y_1$:

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Durch einfache Umgestaltung kommt dieselbe auf die Form:

1) $$a^2 y_1 x - b^2 x_1 y = (a^2 - b^2) x_1 y_1.$$

In gleicher Weise erhält man für eine zweite Normale im Punkte $x_2 y_2$ die Gleichung:

2) $$a^2 y_2 x - b^2 x_2 y = (a^2 - b^2) x_2 y_2,$$

aus deren Verbindung mit Nr. 1) die Koordinaten des Durchschnittes beider Linien zu berechnen sind. Man erhält durch Entfernung von y:

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \frac{y_1 - y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2} \cdot x_1 x_2,$$

oder, wenn wir die numerische Exzentrizität ε und die Abkürzung

$$m = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}$$

einführen:

$$x = \varepsilon^2 \cdot \frac{x_1 x_2}{m}.$$

Nach § 5 Nr. 11) stellt hierbei m die Abscisse desjenigen Punktes der x-Achse dar, in welchem sie von der Verbindungsgeraden der Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ geschnitten wird. Läßt man nun, um zum Krümmungsmittelpunkte zu gelangen, die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ in einen übergehen, so wird die Verbindungsgerade zur Tangente im Punkte $x_1 y_1$, folglich nach § 21 Nr. 12)

$$m = \frac{a^2}{x_1}.$$

Hieraus entsteht für die Abscisse des zu $x_1 y_1$ zugehörigen Krümmungsmittelpunktes der Wert:

3) $$\xi = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}.$$

Dieser Ausdruck kann leicht konstruiert und damit der in der Normale gelegene Krümmungsmittelpunkt gefunden werden. Nach § 21 Nr. 15) ist nämlich $\varepsilon^2 x_1$ die Abscisse des Durchschnittspunktes

von Normale und x-Achse, die wir wie an der angegebenen Stelle mit ξ bezeichnen. Daher folgt:

$$x = \xi \left(\frac{x_1}{a}\right)^2,$$

wobei sich der in der Klammer enthaltene Quotient mittels des über der großen Achse beschriebenen Kreises darstellen läßt. Ist P in Fig. 15 derjenige Punkt dieses Kreises, der mit P_1 die Abscisse $CM = x_1$ gemein hat, so ist, wenn wir $\angle MCP = \alpha$ setzen, sodaß α die exzentrische Anomalie des Punktes P_1 darstellt:

$$\frac{x_1}{a} = \cos\alpha.$$

Fig. 15

Wird nun die Normale P_1N des Punktes P_1 gezogen, so ist

$$x = CN \cdot \cos^2\alpha,$$

folglich, wenn NK senkrecht auf CP, und KO senkrecht auf CM errichtet wird, $CL = x$ und O der gesuchte Krümmungsmittelpunkt.

Setzen wir den Wert von x in die Gleichung 1) der Normale, so erlangen wir für die Ordinate von O das Resultat:

$$y = -\frac{\varepsilon^2 y_1 (a^2 - x_1^2)}{b^2},$$

oder, wenn wir mittels der Ellipsengleichung x_1 durch y_1 ausdrücken:

$$4)\qquad y = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4}.$$

Die Einsetzung von x und y in die Gleichung

$$\varrho^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

(vgl. § 18 Nr. 11) läßt den Krümmungshalbmesser ϱ berechnen. Man erhält, wenn man beide Koordinaten durch x_1 ausdrückt und soweit als möglich reduziert:

$$5)\qquad \varrho^2 = \frac{(a^2 - \varepsilon^2 x_1^2)^3}{a^2 b^2}.$$

Nach § 21 Nr. 17) ist hierin

$$a^2 - \varepsilon^2 x_1^2 = \frac{a^2 u^2}{b^2},$$

wenn u die Länge der Normale bezeichnet, folglich

$$\varrho^2 = \frac{a^4 n^6}{b^8} = \frac{n^6}{p^4}$$

und

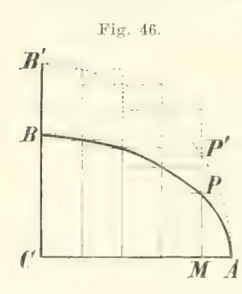
6) $$\varrho = \frac{n^3}{p^2},$$

übereinstimmend mit dem in § 18 Nr. 13) gefundenen Werte des Krümmungshalbmessers der Parabel. Beachten wir, daß nach § 21 Nr. 19) der Ausdruck $\frac{n}{p}$ wie in der Parabel die Sekante des von Normale und Brennstrahl eingeschlossenen Winkels bedeutet, so gelangen wir zu dem Resultate, daß die in Fig. 34 enthaltene Konstruktion des Krümmungshalbmessers auch für die Ellipse ungeänderte Anwendung findet.

§ 24. Die Quadratur der Ellipse.

Auf die in § 20 Nr. 7) gefundene Proportionalität, welche zwischen den Halbachsen einer Ellipse und den zu gleicher Abscisse gehörenden Ordinaten der Ellipse und des über der großen Achse beschriebenen Kreises stattfindet, läßt sich eine Vergleichung der Ellipsenfläche mit der Fläche dieses Kreises gründen. Wir teilen zu diesem Zwecke die Abscisse $CM = x$ (Fig. 46) in n gleiche Teile, ziehen durch alle Teilpunkte Ordinaten und konstruieren mit der Anfangsordinate eines jeden hierdurch gebildeten Streifens und der Strecke $\frac{x}{n}$ ein Rechteck; dann ist die Summe dieser Rechtecke, welche S heißen möge, größer als die elliptische Fläche $CBPM = F$.

Fig. 46.



Bezeichnen wir CB mit y_0, und mit $y_1, y_2, y_3 \ldots y_n = MP$ der Reihe nach die darauf folgenden Ordinaten, so ist

$$S = \frac{x}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}),$$

oder, wenn $CB' = \eta_0, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n = MP'$ die mit $y_0, y_1, y_2 \ldots y_n$ zu gleichen Abscissen gehörenden Ordinaten des umgeschriebenen Kreises ausdrücken:

1) $$S = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{n}(\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{n-1}).$$

Setzen wir ferner

$$2) \qquad S' = \frac{x}{n}(\eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{n-1}),$$

so bedeutet, wenn die vorhergehende Konstruktion auf den über der großen Achse beschriebenen Kreis übertragen wird, S' die Summe der dort in gleicher Weise wie in der Ellipse gebildeten Rechteckflächen, und stellt eine obere Grenze für die teilweis vom Kreise begrenzte Fläche $CB'P'M = F'$ dar. Aus der Verbindung von 1) und 2) folgt:

$$S = \frac{b}{a} \cdot S',$$

oder in Proportionsform:

$$3) \qquad S : S' = b : a.$$

Dasselbe Verhältnis muß aber auch zwischen den Flächen F und F' stattfinden, weil mit fortwährender Vergrößerung der Zahl der auf der Abscisse gebildeten Teile schließlich S mit F und S' mit F' zum Zusammenfallen gebracht werden kann. Bildet man nämlich in der elliptischen Fläche mit der Strecke $\frac{x}{n}$ und den Endordinaten der einzelnen Streifen, worein sie zerlegt wurde, eingeschriebene Rechtecke, so folgt für deren Summe, die s heißen mag, in ähnlicher Weise wie oben das Resultat:

$$4) \qquad s = \frac{b}{a} \cdot \frac{x}{n}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \cdots + \eta_n).$$

Die Vergleichung von 1) und 4) gibt:

$$S - s = \frac{b}{a} \cdot \frac{x(\eta_0 - \eta_n)}{n},$$

und dieser Wert kann kleiner als jede beliebige Zahl gemacht werden, wenn man nur n hinreichend groß annimmt. Bei unendlichem Anwachsen der Zahl n fallen also S und s, folglich nach der Ungleichung

$$S > F > s$$

um so mehr S und F zusammen. In gleicher Weise kann unter gleichen Umständen das Zusammenfallen von S' und F' bewiesen werden, und es folgt dann aus Nr. 3):

$$5) \qquad F : F' = b : a,$$

d. h.: Die über irgend einer Abscisse stehende Ellipsenfläche verhält sich zu der über derselben Abscisse be-

findlichen Fläche des umgeschriebenen Kreises wie die kleine Halbachse zur großen.

Läßt man den Punkt M nach A rücken, so ergibt sich, wenn wir die Fläche der ganzen Ellipse mit E bezeichnen,

$$6) \qquad \frac{1}{4} E = \frac{b}{a} \cdot \frac{\pi}{4} a^2 = \frac{\pi}{4} ab,$$

folglich

$$E = \pi ab.$$

Nach § 22 Nr. 15) entsteht hieraus, wenn a_1, b_1 und ω zwei konjugierte Halbmesser nebst ihrem Konjugationswinkel bedeuten,

$$7) \qquad E = \pi a_1 b_1 \sin \omega.$$

Mittels dieser Formel kann die Ellipsenfläche aus irgend zwei nach Lage und Größe gegebenen konjugierten Durchmessern berechnet werden.

Siebentes Kapitel.

Die Hyperbel.

§ 25. Die Gleichung $\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

Die in der Überschrift enthaltene Gleichung

$$1) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

welche durch Multiplikation mit $-a^2b^2$ in

$$2) \qquad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

umgeformt werden kann, gehört nach § 14 Nr. 12) einer Hyperbel an, deren Hauptachse $2a$ mit der x-Achse und deren Nebenachse $2b$ mit der y-Achse zusammenfällt. So wesentlich sich nun auch diese Kurve in ihrer Gestalt von der im vorigen Kapitel untersuchten Ellipse unterscheidet, so stehen doch beide Linien rücksichtlich der analytischen Entwickelung ihrer Eigenschaften in der innigsten Beziehung. Da nämlich die Gleichung 1) durch bloße Vertauschung von b^2 mit $-b^2$ aus der Gleichung hervorgeht, welche wir der Untersuchung der Ellipse zu Grunde gelegt haben, so befinden wir uns in der günstigen Lage, den größten Teil der für letztere Kurve angestellten Rechnungen mit Anbringung eines einfachen Zeichenwechsels auf die Hyperbel übertragen zu können. Neu treten allein die auf die Asymptoten bezüglichen Betrachtungen auf.

Um den im § 20 bei der Ellipse benutzten Gang der Untersuchung festzuhalten, wollen wir zunächst die x und y der Gleichung 2) in Polarkoordinaten umändern, deren Achse mit der Achse der positiven x identisch ist. Daraus entsteht die Polargleichung:

$$3) \qquad r^2 = \frac{a^2b^2}{b^2\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi}.$$

Wird hierin mittels der aus § 14 Nr. 15) folgenden Formel

$$b^2 = c^2 - a^2$$

die lineare Exzentricität c eingeführt, so ergibt sich:

$$4) \qquad r^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2 \cos^2\varphi - a^2}.$$

Die Gleichung 3) zeigt, daß reelle r von endlicher Größe nur solange möglich sind, als die Differenz

$$b^2 \cos^2\varphi - a^2 \sin^2\varphi$$

einen positiven Wert gibt. Setzen wir nun nach § 14 Nr. 14)

$$\frac{b}{a} = \tan\gamma,$$

wobei γ den von einer Asymptote und der Hauptachse gebildeten spitzen Winkel oder die Hälfte des Asymptotenwinkels bezeichnet, so folgt nach einfacher Umgestaltung, daß für die Hyperbelpunkte die Ungleichung

$$\tan^2\varphi < \tan^2\gamma$$

gelten muß. Wir werden so zu der bereits bekannten Eigenschaft zurückgeführt, daß beide Zweige der Hyperbel von den Asymptoten umschlossen werden. Spitze Werte von φ, welche einen der vier unter sich kongruenten Quadranten der Hyperbel in sich fassen, müssen daher zwischen den Grenzen 0 und γ enthalten sein. Aus Nr. 4) ist dann ersichtlich, daß innerhalb dieser Grenzen r gleichzeitig mit φ wächst, daß also die beiden Achsenscheitel die dem Mittelpunkte am nächsten gelegenen Punkte der Hyperbel darstellen. Ein über der Hauptachse als Durchmesser beschriebener Kreis, den wir Hauptkreis nennen wollen, wird in den Scheiteln von der Hyperbel berührt; alle übrigen Hyperbelpunkte liegen außerhalb des Hauptkreises.

An die Stelle der Beziehungen, welche zwischen den Ordinaten der Ellipse und ihres umgeschriebenen Kreises, oder zwischen ihren Abscissen und denen des eingeschriebenen Kreises stattfinden, treten bei der Hyperbel entsprechende Relationen für ihre Vergleichung mit zwei gleichseitigen Hyperbeln, deren eine die Strecke a, die andere die Länge b zur Halbachse hat. Diese beiden Kurven sind durch die Gleichungen

$$5) \qquad x^2 - y^2 = a^2, \quad x^2 - y^2 = b^2$$

bestimmt; sie können aber nicht wie die beiden Kreise der Ellipse zu einer bequemen Konstruktion von Hyperbelpunkten verwendet werden, weil sie selbst nicht eine wesentlich einfachere Darstellung als alle andern Hyperbeln zulassen.

An die Stelle der goniometrischen Gleichung

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

deren Analogie mit der Ellipsengleichung zur Auffindung von Ellipsenpunkten gebraucht wurde, tritt hier die Gleichung:

$$\sec^2\alpha - \tan^2\alpha = 1,$$

wenn wir $\frac{x}{a} = \sec\alpha$ und $\frac{y}{b} = \tan\alpha$ setzen. Durch Konstruktion der Werte $x = a\sec\alpha$ und $y = b\tan\alpha$ sind daher, wenn α einen beliebigen Winkel bedeutet, die zusammengehörigen Koordinaten eines Hyperbelpunktes bestimmt. Die Ausführung dieser Konstruktion können wir um so mehr übergehen, als wir später einfachere Mittel zur Darstellung der Hyperbel kennen lernen werden.

Was ferner die im § 20 Nr. 9) und 10) angewendete Zerlegung der beiden Seiten der Ellipsengleichung in zwei Faktoren ersten Grades betrifft, so kann dieselbe mittels eines einzigen Zeichenwechsels für die Hyperbel brauchbar gemacht werden. Die Gleichungen der beiden Geraden, durch deren Durchschnitt ein Hyperbelpunkt bestimmt wird, lauten nämlich

$$\frac{y}{b_1} = 1 + \frac{x}{a}, \quad \frac{y}{b_2} = 1 - \frac{x}{a},$$

wobei wieder die Relation

$$b_1 : b = b : b_2$$

gelten muß. Der Leser wird leicht die einfache Änderung ausfindig machen, welche hiernach an der in Fig. 41 gegebenen Konstruktion anzubringen ist, wenn sie zur Gewinnung von Hyperbelpunkten benutzt werden soll.

Geben wir der Gleichung 1) die Form:

$$x^2 = a^2 + \left(\frac{a}{b}\right)^2 y^2,$$

so kann davon eine Darstellung der Hyperbel mit Benutzung der Asymptoten abgeleitet werden. Mit Einführung des halben Asymptotenwinkels entsteht nämlich:

6) $$x^2 = a^2 + y^2\cot^2\gamma.$$

wonach das x eines Hyperbelpunktes als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes mit den Katheten a und $y \cot \gamma$ zu konstruieren ist. Auch hier wird die Ausführung der Konstruktion keine besondere Schwierigkeit machen.

Brennpunkte der Hyperbel. Zur Aufsuchung von Brennpunkten der Hyperbel können fast wörtlich dieselben Schlüsse wiederholt werden, welche bei der gleichen auf die Ellipse bezüglichen Untersuchung zum Ziele führten; nur ist in den Endresultaten b^2 mit $-b^2$ zu vertauschen. Aus der Gleichung

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2,$$

in welcher x und y einen beliebigen Punkt einer Linie zweiten Grades, sowie ξ und η einen Brennpunkt dieser Linie bezeichnen, folgern wir zunächst wie bei der Ellipse, daß Brennpunkte nur in einer der Achsen gelegen sein können. Für Brennpunkte in der x-Achse gelten dann die Gleichungen:

$$\beta = 0, \quad \xi + \alpha\gamma = 0, \quad \eta = 0,$$

woraus durch Zusammenstellung mit der Gleichung der Hyperbel die Resultate

$$7) \qquad \gamma = a, \quad \xi^2 = a^2 + b^2 = e^2$$

hervorgehen. Dies gibt

$$\xi = \pm e,$$

d. i. die beiden bekannten Brennpunkte der Hyperbel. Für die Konstante α folgt noch aus $\xi + \alpha\gamma = 0$:

$$\alpha = -\frac{\xi}{a} = \mp \varepsilon,$$

wobei ε wie früher die numerische Exzentrizität bezeichnet. — Brennpunkte in der Ordinatenachse führen zu imaginären Werten; die Hyperbel enthält also keine weiteren Brennpunkte, als die beiden auf der Verlängerung der Hauptachse gelegenen.

Stellt z_1 den Brennstrahl eines Hyperbelpunktes xy für den auf der Seite der positiven x gelegenen Brennpunkt und z_2 den andern Brennstrahl desselben Hyperbelpunktes dar, so ergibt sich aus den berechneten Werten in Übereinstimmung mit den für die Ellipse gefundenen Resultaten:

$$z_1^2 = (a - \varepsilon x)^2, \quad z_2^2 = (a + \varepsilon x)^2.$$

Beachtet man, daß diese beiden Werte auch in der Form

$$z_1^2 = (\varepsilon x - a)^2, \quad z_2^2 = (\varepsilon x + a)^2$$

geschrieben werden können, so läßt sich rücksichtlich der in den hieraus hervorgehenden Formeln

$$8) \qquad z_1 = \pm(\varepsilon x - a), \quad z_2 = \pm(\varepsilon x + a)$$

zur Geltung zu bringenden Vorzeichen mittels der für die Scheitel der Hauptachse geltenden Substitution $x = \pm a$, unter Berücksichtigung des stetigen Verlaufes der Kurve innerhalb eines jeden der beiden Hyperbelzweige leicht die Regel ableiten, daß für positive x das obere, für negative dagegen das untere Zeichen zu verwenden ist. Dieselbe Regel gilt für das Vorzeichen in dem aus Subtraktion der beiden Gleichungen 8) entstehenden Resultate:

$$9) \qquad z_2 - z_1 = \pm 2a,$$

welches zu dem bereits in § 14 aus Fig. 28 abgeleiteten, zur Konstruktion von Hyperbelpunkten brauchbaren Lehrsatze zurückführt.

§ 26. Die Hyperbel und die Gerade; die Krümmungskreise.

Die auf die gegenseitigen Lagen einer Hyperbel und einer Geraden bezüglichen Untersuchungen, soweit sie nicht die neu auftretenden Eigenschaften der Asymptoten berühren, sind, wenn wir Wiederholung derselben Rechnungen vermeiden wollen, am einfachsten auf die entsprechenden Betrachtungen im § 21 und im § 22 zurückzuführen. Bezeichnen wir daher wie dort die Gleichung der Geraden mit

$$1) \qquad y = Mx + n,$$

während

$$2) \qquad a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

die Gleichung der Hyperbel darstellt, so gilt für die Abscissen der etwa vorhandenen gemeinschaftlichen Punkte beider Linien die Gleichung:

$$3) \qquad (a^2M^2 - b^2)x^2 + 2a^2Mnx + a^2(n^2 + b^2) = 0.$$

Dieselbe ist immer quadratisch, mit Ausnahme des einzigen Falles, wenn

$$a^2M^2 = b^2$$

oder

$$M = \pm \frac{b}{a},$$

d. i. wenn die Gerade mit einer der beiden Asymptoten parallel läuft. Dann bleibt aus Nr. 3) eine Gleichung ersten Grades, und es folgt hieraus der Satz: **Jede Parallele zu einer Asymptote schneidet die Hyperbel in einem Punkte***).

In jedem andern Falle, d. h. sobald die Gerade die Asymptoten schneidet, behält, wie schon bemerkt wurde, die Gleichung 3) ihre quadratische Form; die Gerade und die Hyperbel besitzen also höchstens zwei gemeinschaftliche Punkte. Aus der für die Ellipse geführten Rechnung leiten wir her, daß hierbei die Gerade Sekante oder Tangente darstellt, oder endlich keinen Punkt mit der Hyperbel gemein hat, je nachdem

$$a^2 b^2 (a^2 M^2 - b^2 - n^2) \overset{<}{\underset{>}{=}} 0.$$

Die Beachtung des Umstandes, daß der außerhalb der Klammer befindliche Faktor einen positiven Wert besitzt, zeigt, daß das Eintreten des ersten, zweiten oder dritten Falles davon abhängig gemacht werden muß, ob die Differenz

$$b^2 + n^2 - a^2 M^2$$

positiv, gleich Null oder negativ ist. Soll die Gerade die Hyperbel in einem Punkte berühren, so muß die Gleichung

$$4) \qquad a^2 M^2 = b^2 + n^2$$

Geltung finden. Führen wir hierin mittels der Beziehungen

$$M = \tan \alpha, \quad b^2 = c^2 - a^2$$

den zwischen der Geraden und der x-Achse enthaltenen Winkel α und die lineare Exzentrizität c ein, so kommen wir auf die Gleichung 5) des § 21 zurück, die genau so wie dort geometrisch gedeutet werden kann. Es folgt das Resultat, daß der Fußpunkt eines von einem Brennpunkte auf die Tangente gefällten Lotes oder die Projektion des Brennpunktes auf die Tangente auf der Peripherie des Hauptkreises gelegen ist. Werden endlich mit Anwendung derselben Hilfsmittel die beiden noch übrigen Fälle

*) In gleicher Weise wie bei den zur Parabelachse parallelen Geraden läßt sich auch hier ableiten, daß die Parallelen zu einer Hyperbelasymptote als Sekanten aufgefaßt werden können, bei welchen ein Durchschnittspunkt in die Unendlichkeit fällt.

untersucht, so ergibt sich als Seitenstück zu dem früher für die gegenseitigen Lagen einer Geraden und einer Ellipse gefundenen Kennzeichen der folgende Satz: Eine Gerade, die nicht parallel **mit einer Asymptote läuft, kann die Hyperbel in zwei** Punkten schneiden, in einem Punkte berühren oder keinen **Punkt mit ihr gemein haben; der erste, zweite oder dritte dieser Fälle findet statt, je nachdem die Projektionen der Brennpunkte auf die Gerade außerhalb, auf oder innerhalb der Peripherie des Hauptkreises liegen***).

Tangenten der Hyperbel. Zur analytischen Lösung der auf Tangenten bezüglichen Aufgaben dient die obige Gleichung 1), welche zu diesem Zwecke in ganz gleicher Weise wie Nr. 1) im § 21 zu benutzen ist. Für die Gleichung einer Tangente von gegebener Richtung folgt dann nach Analogie von § 21 Nr. 6):

$$5) \qquad y = Mx \pm \sqrt{a^2 M^2 - b^2}.$$

Die hierin unter dem Wurzelzeichen befindliche Differenz läßt erkennen, daß nicht wie bei der Ellipse nach jeder Richtung hin Tangenten möglich sind, sondern nur unter der Bedingung, daß die Beziehung

$$M^2 > \frac{b^2}{a^2}$$

stattfindet. Es gibt dies die geometrische Deutung, daß der von einer Tangente und der Hauptachse gebildete spitze Winkel immer zwischen den Grenzen 90^0 und γ enthalten sein muß, wobei γ wie früher den halben Asymptotenwinkel bezeichnet. Berechnen wir die Koordinaten der Berührungspunkte, so zeigt sich, daß die Asymptoten selbst Tangenten für unendlich ferne Punkte der Hyperbel darstellen, d. h. daß sie als äußerste Grenzen der Tangenten auftreten. Die Form der Rechnung bleibt hierbei dieselbe wie bei der Ellipse, und es gelten auch im übrigen rücksichtlich der Lage der Berührungspunkte die dort gefundenen Resultate.

Soll die Aufgabe, eine Tangente an die Hyperbel durch einen Punkt $x_1 y_1$ zu legen, analytisch gelöst werden, so sind zu diesem

* Die zu einer Asymptote parallelen Geraden haben rücksichtlich des Fußpunktes die geometrische Eigenschaft der Sekanten; die Asymptoten selbst fallen unter die Tangenten.

Zwecke die zur Herleitung von § 21 Nr. 7) bis 12) angewendeten Entwickelungen zu wiederholen, wobei nur an b^2 der mehrfach erwähnte Zeichenwechsel angebracht werden muß. Als Gleichung der Tangente im Peripheriepunkte $x_1 y_1$ findet sich dann:

6) $$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1,$$

und hieraus für die Richtungskonstante der Tangente der Wert

7) $$M = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

während die auf den Achsen abgeschnittenen Strecken m und n die Größen

8) $$m = \frac{a^2}{x_1}, \quad n = -\frac{b^2}{y_1}$$

erhalten. Aus der Vergleichung des für m gefundenen Resultates mit der Gleichung der Berührungssehne im Kreise (§ 10 Nr. 3) folgt u. a., daß die Tangente des Hyperbelpunktes $x_1 y_1$ und die demselben Punkte zugehörige Berührungssehne des Hauptkreises sich in der Hauptachse schneiden. Zu einer einfacheren Konstruktion der Tangente als diejenige sein würde, welche auf diese Bemerkung gegründet werden kann, führt die folgende Betrachtung.

Da die absolute Größe von $m = \frac{a^2}{x_1}$ für alle Hyperbelpunkte höchstens gleich a sein kann, so muß jede Tangente die Hauptachse zwischen den Scheiteln, also um so mehr auch zwischen den Brennpunkten schneiden, in ähnlicher Weise, wie letzteres bei der Ellipse mit den Normalen stattfand. Bezeichnen wir nun die Entfernungen dieses Durchschnittspunktes von den beiden Brennpunkten mit t_1 und t_2, wobei t_1 dem auf der Seite der positiven x gelegenen Brennpunkte zugehören soll, so folgt:

$$t_1 = e - \frac{a^2}{x_1} = \frac{a}{x_1}(\varepsilon x_1 - a),$$

$$t_2 = e + \frac{a^2}{x_1} = \frac{a}{x_1}(\varepsilon x_1 + a),$$

und hieraus mit Rücksicht auf die im § 25 Nr. 8) gefundenen Werte der Brennstrahlen z_1 und z_2:

$$t_1 = \frac{a z_1}{x_1}, \quad t_2 = \frac{a z_2}{x_1}.$$

Diese beiden Resultate geben die Proportion:

$$9)\qquad t_1 : t_2 = z_1 : z_2,$$

welche der im § 21 Nr. 16) für die Normale einer Ellipse gefundenen vollständig entspricht. Es entsteht daher auch die entsprechende geometrische Deutung: Jede Tangente einer Hyperbel halbiert den von den Brennstrahlen des Berührungspunktes eingeschlossenen Winkel.

Für einen außerhalb der Hyperbel gelegenen Punkt $x_1 y_1$ stellt Nr. 6) die Gleichung der Berührungssehne dar.

Normalen der Hyperbel. Die Normale im Hyperbelpunkte $x_1 y_1$ erhält mit Benutzung von Nr. 7) oder auch sofort nach § 21 Nr. 13) die Gleichung:

$$10)\qquad y - y_1 = -\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1).$$

Hiernach ergibt sich für die Abscisse ihres Durchschnittspunktes mit der x-Achse in vollständiger Übereinstimmung mit dem bei der Ellipse gefundenen Resultate:

$$11)\qquad \xi = \varepsilon^2 x_1,$$

woraus leicht hergeleitet wird, daß hier dieser Punkt stets außerhalb der von den beiden Brennpunkten begrenzten Strecke gelegen sein muß. Mit Ausnahme der hierdurch bedingten geringen Abänderungen gelten im übrigen fast wörtlich die auf die Normalen der Ellipse bezüglichen Schlüsse. Für die Länge der Normale findet sich:

$$12)\qquad n^2 = \frac{b^2}{a^2}(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2) = \frac{b^2}{a^2} z_1 z_2,$$

und die Projektion von n auf einen der Brennstrahlen gibt wieder den halben Parameter.

Krümmungsmittelpunkt und Krümmungshalbmesser der Hyperbel. Aus der Gleichung der Normale werden in ganz gleicher Weise wie im § 23 die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes abgeleitet. Man erhält hierbei, da ein Vorzeichenwechsel im Werte von b^2 ohne Einfluß auf die Resultate 3) und 4) dieses Paragraphen bleibt, diese beiden Größen ungeändert wieder. Die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind also wie bei der Ellipse:

$$13)\qquad x = \frac{\varepsilon^2 x_1^3}{a^2}, \quad y = -\frac{\varepsilon^2 a^2 y_1^3}{b^4}.$$

Zum Zwecke der geometrischen Darstellung kann der erste dieser Werte in der Form

$$x = \xi \cdot \sec^2 \alpha$$

geschrieben werden, wobei $\xi = \varepsilon^2 x_1$ (nach Nr. 11) die Abscisse des Durchschnittspunktes der Normale und der x-Achse bedeutet und der Winkel α mit Hilfe der Gleichung $\sec \alpha = \frac{x_1}{a}$ zu konstruieren ist. Nach einer im § 25 gemachten Bemerkung erhält man denselben Winkel auch mittels der Formel: $\tan \alpha = \frac{y_1}{b}$. Die Ausführung der hieraus folgenden Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes mag dem eigenen Nachdenken des Lesers überlassen bleiben.

Die Ableitung des Krümmungshalbmessers ist ebenfalls in Übereinstimmung mit dem im § 23 eingeschlagenen Verfahren. Man findet zunächst:

$$14) \qquad \varrho^2 = \frac{(\varepsilon^2 x_1^2 - a^2)^3}{a^2 b^2},$$

und hieraus wieder mittels des obigen Wertes von n (Länge der Normale):

$$15) \qquad \varrho = \frac{n^3}{p^2};$$

wobei p wie früher den Halbparameter bedeutet, welcher durch Projektion von n auf einen der Brennstrahlen des Punktes $x_1 y_1$ dargestellt werden kann. Hieraus folgt, wie im § 23, daß die in Fig. 34 aus Nr. 13) des § 18 abgeleitete Konstruktion des Krümmungshalbmessers ebenso wie für die Parabel und Ellipse auch für die Hyperbel angewendet werden kann. Diese Konstruktion gilt also für alle Kegelschnitte ohne Unterschied.

§ 27. Fortsetzung.

Durchmesser der Hyperbel. Wenn wir, um den geometrischen Ort der Sehnenmitten ausfindig zu machen, die Gleichung 3) des vorhergehenden Paragraphen mittels Division durch $a^2 M^2 - b^2$ auf die Form

$$1) \qquad x^2 + 2 \cdot \frac{a^2 M n}{a^2 M^2 - b^2} \cdot x + \frac{a^2 (n^2 + b^2)}{a^2 M^2 - b^2} = 0$$

bringen, so ist dabei vorausgesetzt, daß nicht

$$a^2 M^2 = b^2$$

sein darf. Es ist leicht zu ersehen, daß sich dieser auszuschließende Fall auf die Asymptoten und die damit parallelen Geraden bezieht, rücksichtlich deren wir bereits zu der Erkenntnis gelangt sind, daß sie nicht Sehnen der Hyperbel bilden können. In jedem andern Falle findet sich wie bei der Ellipse zu einem Systeme paralleler Sehnen mit der Richtungskonstante M ein geradliniger, durch den Mittelpunkt gehender Durchmesser, der die Mitten dieser Sehnen enthält. Seine Gleichung lautet analog mit § 22 Nr. 3):

2) $$a^2 M y - b^2 x = 0.$$

Wird seine Richtungskonstante mit M' bezeichnet, so entsteht die Beziehung:

3) $$M M' = \frac{b^2}{a^2},$$

aus welcher in gleicher Weise wie aus Nr. 4) § 22 hergeleitet wird, daß auch bei der Hyperbel konjugierte Durchmesser auftreten, welche ebenso wie dort mit den Supplementarsehnen im Zusammenhange stehen. Bezeichnend für die Hyperbel sind dabei die folgenden Eigentümlichkeiten.

Sind α und β die in der Drehrichtung der Polarwinkel gemessenen Winkel zwischen der Hauptachse und zwei konjugierten Durchmessern, so folgt aus Nr. 3):

4) $$\tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{b^2}{a^2}.$$

Dieses Produkt ist stets positiv, beide Winkeltangenten haben also gleiche Vorzeichen, wonach beide Durchmesser in denselben Quadranten gelegen sein müssen. Da ferner durch die Asymptoten der Fall

$$\tan\alpha = \tan\beta = \pm\frac{b}{a}$$

ausgeschlossen ist, so muß der absolute Wert einer dieser beiden Winkeltangenten größer, der andere kleiner als $\frac{b}{a}$ sein, d. h. der eine Durchmesser liegt zwischen Asymptote und Hauptachse, der andere zwischen Asymptote und Nebenachse. Nach der Polargleichung 3) im § 25 wird daher nur einer der beiden Durchmesser die Hyperbel schneiden, sodaß zwischen ihnen ein gleicher Gegensatz wie zwischen der Haupt- und Nebenachse stattfindet.

welche selbst einen speziellen Fall konjugierter Durchmesser bilden. Noch ist zu bemerken, daß die beiden Achsen ebenso wie in der Ellipse das einzige Paar konjugierter Durchmesser sind, welches einen rechten Winkel einschließt, da das Produkt $\tan\alpha \cdot \tan\beta$ bei Ausschließung des Falles, wo es die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ annimmt, nie gleich -1 sein kann. Nach dieser Bemerkung zeigt sich die zur Auffindung der Achsen einer gegebenen Ellipse dienende Konstruktion auch für die Hyperbel brauchbar.

Wir gehen dazu über, die Gleichung der Hyperbel für ein schiefwinkliges Koordinatensystem aufzustellen, dessen Achsen ein Paar konjugierter Durchmesser bilden; α sei der Winkel, welchen die Hauptachse mit dem die Hyperbel schneidenden Durchmesser einschließt, β der Winkel zwischen der Hauptachse und dem andern Durchmesser. Dann ist, wenn wir, um uns von den Vorzeichen unabhängig zu halten, die Quadrate von $\tan\alpha$ und $\tan\beta$ bilden,

$$\tan^2\alpha < \frac{b^2}{a^2}, \qquad \tan^2\beta > \frac{b^2}{a^2},$$

folglich sind die Differenzen

$$b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha, \qquad a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta$$

beide positiv. Als Gleichung der Hyperbel ergibt sich durch dieselbe Rechnung, welche im § 22 zu gleichem Zwecke benutzt wurde:

$$\frac{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}{a^2b^2}\cdot x^2 - \frac{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}{a^2b^2}\cdot y^2$$
$$-2\cdot\frac{a^2\sin\alpha\sin\beta - b^2\cos\alpha\cos\beta}{a^2b^2}\cdot xy = 1.$$

Der zu $2xy$ gehörige Faktor ist nach Nr. 4) gleich Null. Mit Einführung der Abkürzungen

$$5) \qquad \begin{cases} a_1^2 = \dfrac{a^2b^2}{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}, \\[2ex] b_1^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta} \end{cases}$$

entsteht die Gleichung:

$$6) \qquad \left(\frac{x}{a_1}\right)^2 - \left(\frac{y}{b_1}\right)^2 = 1.$$

Infolge der oben gemachten Bemerkung über das Vorzeichen der Differenzen, welche sich in den Nennern der Werte von a_1^2 und

b_1^2 befinden, sind hierbei a_1 und b_1 reelle Größen. Aus Nr. 6), sowie auch aus der Polargleichung der Hyperbel zeigt sich, daß a_1 die Hälfte des die Hyperbel schneidenden Durchmessers darstellt, wenn wir uns denselben in den beiden mit der Hyperbel gebildeten Durchschnittspunkten begrenzt denken; b_1 kann nach einer auf Vergleichung mit der Ellipse gestützten Analogie als Hälfte des andern Durchmessers aufgefaßt und auf demselben in einer gleichen Weise aufgetragen werden, wie wir dies früher mit der Größe b auf der Nebenachse getan haben.

Die Übereinstimmung der Form, welche sich in der auf zwei konjugierte Durchmesser bezogenen Gleichung 6) der Hyperbel und der für die Achsen geltenden Hauptgleichung darlegt, berechtigt wieder, wie dies früher schon bei Parabel und Ellipse geschehen, zu dem Schlusse, daß die der Gleichungsform entnommenen Resultate auch auf das neue System übertragen werden können, insoweit sie nämlich von der rechtwinkligen Lage der Koordinatenachsen unabhängig sind. Wir sehen davon ab, diejenigen Beziehungen zu wiederholen, die sich in gleicher Weise bei der Ellipse vorgefunden haben, und beschränken uns darauf, die Gleichungen der Asymptoten im neuen Systeme zu ermitteln.

Wenden wir dieselben Folgerungen an, welche im § 14 unter III bei Ableitung von Nr. 13) zu dem Begriffe der Asymptoten und deren Gleichungen hinführten, so ergibt sich aus Nr. 6), daß eine dadurch repräsentierte Kurve zwei geradlinige Asymptoten besitzt, welche in der Gleichung

$$7) \qquad y = \pm \frac{b_1}{a_1} x$$

zusammengefaßt werden können. Der möglicherweise entstehende Zweifel, ob hierin wirklich die bereits bekannten geraden Linien ausgedrückt sind, kann am vollständigsten beseitigt werden, wenn wir die Gleichungen der früheren Asymptoten, welche beide in der Formel

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} x^2$$

enthalten sind, für unser jetziges Koordinatensystem transformieren. Mittels der bekannten Änderungsformeln entsteht dann:

$$(x \sin\alpha + y \sin\beta)^2 = \frac{b^2}{a^2} (x \cos\alpha + y \cos\beta)^2,$$

und hieraus nach gehöriger Reduktion:

$$(a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta)y^2 - (b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha)x^2$$
$$+ 2(a^2\sin\alpha\sin\beta - b^2\cos\alpha\cos\beta)xy = 0.$$

Das letzte Glied linker Hand ist nach Nr. 4) gleich Null; es bleibt daher:

$$y^2 = \frac{b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha}{a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta}\cdot x^2,$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln 5):

$$y^2 = \frac{b_1^2}{a_1^2}x^2,$$

wodurch wir nach Ausziehung der Quadratwurzel auf Nr. 7) zurückkommen. Die Gleichungsform der Asymptoten ist also wie die der Hyperbel selbst immer dieselbe, welches Paar konjugierter Durchmesser auch die Stelle der Koordinatenachsen vertreten mag. Hiernach kann die auf diese Form gegründete Konstruktion der Asymptoten leicht verallgemeinert werden. Legt man nämlich zu zwei konjugierten Durchmessern, deren vom Mittelpunkte aus gemessene Hälften die Längen a_1 und b_1 besitzen, durch ihre Endpunkte Parallelen, so sind die Asymptoten Diagonalen eines jeden auf diese Weise gebildeten Parallelogrammes. Es liegt hierin zugleich ein einfaches Mittel, aus zwei nach Lage und Größe gegebenen konjugierten Durchmessern die Lage der Hyperbelachsen durch Konstruktion herzuleiten, insofern durch die Haupt- und Nebenachse die von den Asymptoten gebildeten Winkel halbiert werden.

Die Beziehungen, welche nach § 22 Nr. 15) und 16) zwischen den konjugierten Durchmessern und den beiden Achsen einer Ellipse stattfinden, wiederholen sich bei der Hyperbel in fast ungeänderter Weise. Aus den Gleichungen 5) folgt:

$$8) \qquad a_1^2 b_1^2 = \frac{a^4 b^4}{(b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha)(a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta)}.$$

Das Produkt im Nenner ist identisch mit

$$a^2b^2\sin^2(\beta - \alpha) - (b^2\cos\alpha\cos\beta - a^2\sin\alpha\sin\beta)^2.$$

Der Subtrahend verschwindet nach 4); daher folgt aus 8), wenn man den Konjugationswinkel $\beta - \alpha$ mit ω bezeichnet:

$$9) \qquad (b^2\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha)(a^2\sin^2\beta - b^2\cos^2\beta) = a^2b^2\sin^2\omega$$

Setzt man dies in 8) ein, so erhält man:

$$10) \qquad a_1 b_1 \sin\omega = ab.$$

Ferner erhält man aus 5) durch Subtraktion unter Berücksichtigung von 9):

$$11) \quad a_1^2 - b_1^2 = \frac{1}{\sin^2\omega}\left[a^2(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) - b^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta)\right].$$

Aus 4) ergibt sich, wenn der Klammerinhalt mit M bezeichnet wird:

$$M = a^2(\sin\alpha + \sin\beta)^2 - b^2(\cos\alpha + \cos\beta)^2$$
$$= a^2(\sin\alpha - \sin\beta)^2 - b^2(\cos\alpha - \cos\beta)^2.$$

Hieraus folgt nach bekannten goniometrischen Beziehungen:

$$M = 4\cos^2\tfrac{1}{2}\omega\left[a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right]$$
$$= 4\sin^2\tfrac{1}{2}\omega\left[a^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - b^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)\right].$$

Ersetzt man $\cos^2\frac{1}{2}\omega$ durch $1 - \sin^2\frac{1}{2}\omega$, so erhält man

$$a^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) - b^2\cos^2\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) = (a^2 - b^2)\sin^2\tfrac{1}{2}\omega,$$

daher ist

$$M = (a^2 - b^2)\sin^2\omega.$$

Hieraus und aus 11) folgt schließlich

$$12) \qquad a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2.$$

Die letzte Gleichung zeigt, daß die Längen zweier konjugierter Durchmesser gleichzeitig wachsen, während dabei nach 10) die Größe des Konjugationswinkels abnimmt. Aus der Polargleichung ist ersichtlich, daß bei diesem Anwachsen der Durchmesser beide den Asymptoten immer näher rücken, bis sie schließlich in den Asymptoten zusammenfallen. Konjugierte Durchmesser von gleicher Länge sind nur in der gleichseitigen Hyperbel möglich, und zwar gilt dort diese Gleichheit für jedes zusammengehörige Paar.

Mittels der Gleichungen 10) und 12) können die Längen der Achsen gefunden werden, wenn a_1, b_1 und ω gegeben sind; nur läßt sich dabei nicht dieselbe bequeme Rechnung anwenden, welche zu den Formeln 21) im § 22 hinführte. Ein einfacheres Mittel, aus zwei konjugierten Durchmessern die Größe der Hauptachse und Nebenachse konstruktiv herzuleiten, werden uns im folgenden Paragraphen die Asymptoten liefern.

§ 28. Die Asymptoten als Koordinatenachsen.

Eine besonders einfache Gleichungsform erlangt die Hyperbel, wenn man ihre beiden Asymptoten zu Koordinatenachsen nimmt. Nach dem, was wir früher über die Größe des Asymptotenwinkels kennen gelernt haben, kann dieses Koordinatensystem nur für eine gleichseitige Hyperbel rechtwinklig sein.

Bezeichnen wir wie früher die Hälfte des Asymptotenwinkels mit γ, wobei die Beziehung

$$1) \qquad \tan\gamma = \frac{b}{a}$$

Geltung hat, so mag über die beiden Koordinatenachsen so verfügt werden, daß die positive Seite der y-Achse unter dem Winkel γ und dieselbe Seite der x-Achse unter dem Winkel $-\gamma$ gegen die Hauptachse geneigt ist, wobei wir voraussetzen, daß positive Winkel in der früher für die Polwinkel festgestellten Drehrichtung gemessen werden. Soll nun die neue Gleichung der Hyperbel durch Veränderung der Koordinaten aus der auf die Achsen bezogenen Gleichung

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

hergeleitet werden, so sind die Formeln 2) des § 4 zu verwenden, wenn darin $\omega = 90^0$, $\alpha = -\gamma$, $\beta = \gamma$ gesetzt wird. Beim Übergange zum neuen Systeme ist also

$$(y + x)\cos\gamma \text{ für } x, \qquad (y - x)\sin\gamma \text{ für } y$$

zu setzen. Dann entsteht aus

$$\frac{(y + x)^2\cos^2\gamma}{a^2} - \frac{(y - x)^2\sin^2\gamma}{b^2} = 1$$

nach Entwickelung der Quadrate und besserer Anordnung und Vereinigung der Glieder:

$$\frac{b^2\cos^2\gamma - a^2\sin^2\gamma}{a^2b^2} \cdot (x^2 + y^2) + 2 \cdot \frac{b^2\cos^2\gamma + a^2\sin^2\gamma}{a^2b^2} \cdot xy = 1$$

Mittels der aus 1) folgenden Beziehung

$$b^2\cos^2\gamma = a^2\sin^2\gamma$$

erlangt diese letzte Gleichung die einfache Form:

$$\frac{4xy\cos^2\varphi}{a^2} = 1.$$

oder auch:

$$xy = \frac{a^2(1 + \tan^2\varphi)}{4},$$

und mit Einsetzung des obigen Wertes von $\tan\varphi$:

$$2) \qquad xy = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Die auf die Asymptoten als Achsen bezogenen Koordinaten eines Hyperbelpunktes besitzen hiernach ein konstantes Produkt, nämlich:

$$\frac{a^2 + b^2}{4} = \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

welches den Namen Potenz der Hyperbel führt. In dieser Eigenschaft ist hauptsächlich das wesentliche Merkmal der Asymptoten begründet, indem daraus folgt, daß, wenn eine Koordinate wächst, die andere abnehmen muß, und daß dabei die eine dieser Längen immer so groß genommen werden kann, daß die andere kleiner wird, als jede angebbare Größe, d. h. daß die Hyperbel den Asymptoten beliebig nahe rücken kann, ohne sie doch je vollständig zu erreichen.

Mittels der Gleichung 2) findet die Lösung der im vorigen Paragraphen besprochenen Aufgabe, aus Lage und Größe zweier konjugierten Durchmesser die Lage und Größe der Achsen abzuleiten, ihren Abschluß. Sobald nämlich die Asymptoten und die Achsen in der früher angegebenen Weise ihrer Lage nach bestimmt worden sind, hat man nur noch die auf die Asymptoten bezogenen Koordinaten eines Endpunktes des die Hyperbel schneidenden Durchmessers zu konstruieren, um dann mit Hilfe der aus 2) folgenden Gleichung

$$c = 2\sqrt{xy},$$

welche eine einfache geometrische Darstellung zuläßt, die lineare Exzentrizität und somit auch die Lage der Brennpunkte zu ermitteln. Aus den Asymptoten und Brennpunkten kann aber nach früheren Sätzen leicht die Länge der Achsen hergeleitet werden.

Sind x, y und x_1, y_1 die Koordinaten zweier auf die Asymptoten bezogenen Hyperbelpunkte, so gelten nach Nr. 2) die Gleichungen:

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4}, \qquad x_1 y_1 = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

folglich ist auch

$$xy = x_1 y_1.$$

Hieraus folgt die Proportion:

$$y_1 : y = x : x_1,$$

der man ohne Schwierigkeit die Mittel entnehmen wird, beliebig viele Punkte einer Hyperbel konstruktiv darzustellen, sobald ein Peripheriepunkt nebst den Asymptoten gegeben ist. Zu einer noch einfacheren Lösung dieser Aufgabe führt die folgende Betrachtung.

Schreiben wir die Gleichung 2) in der Form

3) $$xy = \left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

und bezeichnen eine Gerade, welche beide Asymptoten außerhalb des Mittelpunktes schneidet, mit

4) $$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1,$$

so findet sich durch Entfernung von y für die Abscissen der etwa vorhandenen gemeinschaftlichen Punkte der Geraden und der Hyperbel nach einfacher Umformung die Gleichung:

5) $$x^2 - mx + \frac{mc^2}{4n} = 0;$$

m und n stellen hierbei die von der Geraden auf den Asymptoten abgeschnittenen Strecken dar. Im Falle, daß die Gerade die Hyperbel schneidet, folgt hieraus für den Mittelpunkt xy der von ihr gebildeten Sehne:

$$x = \tfrac{1}{2} m,$$

und wenn man diesen Wert in Nr. 4) einsetzt:

$$y = \tfrac{1}{2} n.$$

Vergleicht man diese Resultate nach den bekannten Formeln für die Koordinaten des Mittelpunktes einer geradlinigen Strecke, so ergibt sich sofort, daß der Halbierungspunkt der Sehne zugleich in der Mitte zwischen den beiden Punkten gelegen ist, worin sie selbst oder ihre Verlängerung die Asymptoten schneidet. Eine leicht nachzuweisende Folge hiervon ist, daß der Abstand zwischen dem einen Endpunkte der Sehne und ihrem Durchschnitte mit der einen Asymptote der Entfernung ihres anderen Endpunktes von dem Punkte, worin sie die andere Asymptote schneidet, gleich sein muß.

Die soeben gefundene Eigenschaft der Hyperbel gewährt nun ein besonders einfaches Mittel, einzelne Punkte dieser Kurve zu konstruieren, sobald ein Peripheriepunkt nebst den Asymptoten gegeben ist. Mit Benutzung dieser Eigenschaft kann nämlich auf jeder Geraden, welche man durch den gegebenen Punkt so legt, daß sie beide Asymptoten schneidet, ein zweiter Hyperbelpunkt aufgetragen werden, der nachher, wenn man das Anhäufen zu vieler in einem Punkte sich schneidenden Geraden vermeiden will, als neuer Ausgangspunkt der Konstruktion verwendbar bleibt. — In ähnlicher Weise ist zu verfahren, wenn mittels einer Asymptote und dreier Peripheriepunkte die andere Asymptote gefunden werden soll. Mit Hilfe der drei Sehnen, welche durch die drei Hyperbelpunkte gelegt werden können, erlangt man drei sich gegenseitig kontrollierende Punkte der gesuchten Asymptote.

Aus der Bedingung, unter welcher die obige Gleichung 5) zwei gleiche reelle Wurzeln gibt, erhält man als Kennzeichen für den Fall, in welchem die durch Nr. 4) dargestellte Gerade zur Tangente wird:

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 = \frac{m\,c^2}{4n},$$

oder nach gehöriger Hebung:

6) $$m n = c^2.$$

Wird mittels dieser Bedingungsgleichung die Strecke n aus Nr. 5) entfernt, so entsteht für die Abscisse des Berührungspunktes, die wir mit x_1 bezeichnen wollen, die Gleichung:

$$x_1^2 - m x_1 + \frac{m^2}{4} = 0,$$

und hieraus folgt:

7) $$x_1 = \tfrac{1}{2}\, m.$$

Aus 4) ergibt sich dann für die zugehörige Ordinate:

8) $$y_1 = \tfrac{1}{2}\, n.$$

Die Werte 7) und 8) lassen erkennen, daß der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente in der Mitte zwischen den beiden Punkten gelegen ist, in welchen die Tangente von den Asymptoten geschnitten wird. Es ist dies wieder die oben für die Sehnen gefundene Eigenschaft, ausgedehnt auf den Fall, wo die beiden Durchschnitte der

Geraden und der Hyperbel in einen übergehen und die Sehne zur Tangente wird.

Sind die auf die Asymptoten bezogenen Koordinaten x_1 und y_1 eines Hyperbelpunktes gegeben, so erhalten die von der Tangente dieses Punktes auf den Asymptoten abgeschnittenen Strecken nach 7) und 8) die Längen:

$$m = 2x_1, \qquad n = 2y_1,$$

von denen jede einzelne ausreicht, um damit die Tangente zu konstruieren. Werden endlich diese Werte in Nr. 4) eingesetzt, so erlangt die auf die Asymptoten bezogene Gleichung der Hyperbeltangente im Punkte x_1y_1 die Gestalt:

$$9) \qquad \frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1,$$

oder wenn man mit der für x_1 und y_1 geltenden Gleichung

$$2x_1y_1 = \tfrac{1}{2}e^2$$

multipliziert:

$$10) \qquad y_1x + x_1y = \tfrac{1}{2}e^2.$$

Die letzte Gleichung gehört nicht allein in Beziehung auf x und y, sondern auch für x_1 und y_1 dem ersten Grade an und gestattet infolge ihrer symmetrischen Form die Vertauschung der Punkte xy und x_1y_1. Diese Bemerkungen reichen hin, um daraus mit Hilfe einer schon mehrfach angewendeten Schlußfolgerung das Resultat herzuleiten, daß für einen außerhalb der Hyperbel gelegenen Punkt x_1y_1 Nr. 10) die Gleichung der Berührungssehne darstellt.

§ 29. Die Quadratur der Hyperbel.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellte Gleichung der Hyperbel kann auch benutzt werden, um daraus den Inhalt hyperbolisch begrenzter Flächen abzuleiten. Wir beschränken uns auf Berechnung eines Flächenstreifens, welcher von einer Asymptote, zwei zur andern Asymptote parallelen Ordinaten und dem zwischen diesen Ordinaten gelegenen Hyperbelbogen begrenzt ist. Andere Flächenteile, in deren Begrenzung ein Hyperbelbogen auftritt, sind durch geometrische Zerlegung hierauf zurückzuführen.

Zur Vorbereitung entwickeln wir den Flächeninhalt eines Parallelogrammes, welches von den Asymptoten und den hierzu

parallelen Koordinaten eines Hyperbelpunktes begrenzt ist, d. i. den Wert von $xy \sin\alpha$, worin x und y den Hyperbelpunkt und α den hierbei als Koordinatenwinkel auftretenden Asymptotenwinkel bezeichnet. — Hat γ die im vorigen Paragraphen unter 1) angewendete Bedeutung, so folgt aus der Gleichung

$$\alpha = 2\gamma$$

in Verbindung mit der goniometrischen Formel

$$\sin 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1 + \tan^2\gamma}$$

bei Einführung des Wertes von $\tan\gamma$:

$$\sin\alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$

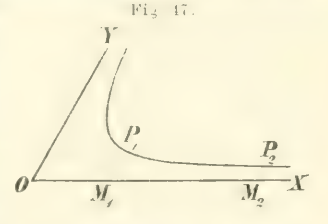
Wird diese Gleichung mit Nr. 2) des vorhergehenden Paragraphen durch Multiplikation verbunden, so ergibt sich:

1) $$xy\sin\alpha = \tfrac{1}{2}ab$$

für den gesuchten Flächeninhalt.

Mit diesem Inhalte soll ein Flächenstreifen der in Rede stehenden Art, wie $P_1 M_1 M_2 P_2$ in Fig. 47, in Vergleichung gestellt werden. Zunächst läßt sich die Fläche dieses Streifens in zwei Grenzen einschließen, indem man zur oberen Grenze ein Parallelogramm mit den anstoßenden Seiten $P_1 M_1$ und $M_1 M_2$, zur unteren ein Parallelogramm mit den Seiten $M_1 M_2$ und $M_2 P_2$ nimmt. Wird die gesuchte Fläche mit F bezeichnet, und sind x_1, y_1 die Koordinaten des Punktes P_1, sowie x_2 und y_2 die von P_2, so erhält man hieraus:

Fig. 47.



$$y_1(x_2 - x_1)\sin\alpha > F > y_2(x_2 - x_1)\sin\alpha.$$

Werden nun diese Ungleichungen durch die aus 1) folgenden Gleichungen

$$x_1 y_1 \sin\alpha = \tfrac{1}{2}ab = x_2 y_2 \sin\alpha$$

dividiert, so wird hierdurch das Verhältnis zwischen der Fläche F und der in 1) enthaltenen konstanten Fläche $\frac{1}{2}ab$, welches mit φ bezeichnet werden soll, von dem Verhältnisse zwischen der End- und Anfangsabscisse des Streifens, welches ξ heißen mag, abhängig gemacht. Mit Anwendung der Bezeichnungen

2) $$\varphi = \frac{2F}{ab}, \quad \xi = \frac{x_2}{x_1}$$

erhält man nämlich aus dieser Division:

$$\xi - 1 > \varphi > 1 - \frac{1}{\xi};$$

und hieraus wieder, wenn man auf ξ reduziert:

3) $$\frac{1}{1-\varphi} > \xi > 1 + \varphi.$$

Die in Nr. 3) enthaltenen Grenzen für den Quotienten ξ in seiner Abhängigkeit vom Quotienten φ lassen sich enger ziehen, wenn man zwischen die Anfangs- und Endordinate des zu berechnenden Streifens $n-1$ Ordinaten so einschaltet, daß dadurch seine Fläche in n Streifen vom gleichen Flächeninhalte $\frac{F}{n}$ zerfällt*). Die für diese einzelnen Streifen geltenden Verhältnisse der End- und Anfangsabscissen, d. h. die darin an die Stelle von ξ tretenden Werte, sollen in der Reihenfolge der Streifen von M_1 aus nach M_2 hin mit $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_n$ bezeichnet werden, sodaß, da bei Aufstellung dieser Verhältnisse sämtliche zwischen x_1 und x_2 eingeschalteten Abscissen sowohl im Zähler als im Nenner vorkommen, bei Multiplikation aller dieser Werte das Resultat

4) $$\xi_1 \cdot \xi_2 \cdot \xi_3 \cdots \xi_n = \frac{x_2}{x_1} = \xi$$

zum Vorschein kommt. Wird nun auf jeden der n Streifen die obige Einschließung in Grenzen angewendet, so tritt hierbei $\frac{F}{n}$ an die Stelle von F, also auch $\frac{\varphi}{n}$ an die Stelle von φ, und es ergibt sich für irgend eines der besprochenen Abscissenverhältnisse, welches ξ_m heißen möge, aus Nr. 3) mit einer einfachen Formänderung im ersten Teile dieser Ungleichung:

$$\left(1 - \frac{\varphi}{n}\right)^{-1} > \xi_m > 1 + \frac{\varphi}{n}.$$

Werden nachher alle diese Abscissenverhältnisse miteinander multipliziert, so erhält man mit Rücksicht auf Nr. 4):

*) Die Art der Ausführung dieser Einschaltung ergibt sich aus den Resultaten der vorliegenden Untersuchung.

$$\left(1 - \frac{q}{n}\right)^{-n} > \xi > \left(1 + \frac{q}{n}\right)^{n},$$

oder auch, wenn man noch mit $\frac{1}{q}$ potenziert und

$$\frac{n}{q} = \omega$$

setzt, wobei ω eine gleichzeitig mit n wachsende und gleichzeitig mit n unendlich werdende Größe bezeichnet:

5) $$\left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^{-\omega} > \xi^{\frac{1}{q}} > \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}.$$

Man gelangt jetzt zu einer Gleichung zwischen dem Abscissenverhältnisse ξ und dem Flächenverhältnisse q, wenn man die Anzahl der einzelnen Streifen, d. i. die Zahl n, bis in das Unendliche wachsen läßt, womit also ω ebenfalls einen unendlichen Wert erlangt. Nach einem bekannten algebraischen Satze*) konvergieren

*) Aus dem in der Anmerkung auf S. 115 für $a > b$ und ein rationales $m > 1$ bewiesenen Resultate

$$m a^{m-1} > \frac{a^m - b^m}{a - b} > m b^{m-1},$$

welches durch Einschließung in Grenzen auch auf irrationale, die Einheit übersteigende Werte von m ausgedehnt werden kann, folgt:

$$m a^{m-1}(a - b) > a^m - b^m > m b^{m-1}(a - b).$$

Wird hierin $a = \frac{k+1}{k}$, $b = 1$ und $m = \frac{k}{n}$ gesetzt, wobei $k > n > 1$ sein soll, so folgt:

$$\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{k}{n}} - 1 > \frac{1}{n}, \text{ also auch: } \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k} > \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}.$$

In gleicher Weise erhält man unter Beibehaltung der für m gemachten Substitution, wenn man $a = 1$, $b = \frac{k-1}{k}$ setzt:

$$\left(\frac{k-1}{k}\right)^{k} > \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n}, \text{ oder auch: } \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k} < \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}.$$

Die gefundenen Resultate zeigen, daß, wenn man n zwischen den Grenzen 1 und ∞ beliebig wachsen läßt, der Wert der Funktion $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$ fortwährend zunimmt, während dagegen $\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n}$ fortwährend abnehmen muß. Da jedoch für jedes endliche n die letztere dieser Funktionen immer größer ist als der entsprechende Wert der ersteren, so kann

hierbei die beiden in Nr. 5) enthaltenen Grenzen gegen einen gemeinschaftlichen Grenzwert, nämlich gegen die irrationale Zahl

$$e = 2{,}7182818\ldots,$$

d. i. die Basis des natürlichen Logarithmensystems. Man erhält folglich aus Nr. 5):

$$e = \xi^{\frac{1}{q}},$$

und bei Anwendung von Logarithmen eines beliebigen Systems:

$$q = \frac{\log \xi}{\log e};$$

oder nach Einsetzung der Werte von q und ξ aus Nr. 2) und Reduktion auf F:

6) $$F = \frac{ab}{2 \log e} \log \left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Bei Anwendung gemeiner Logarithmen entsteht hieraus in Zahlen:

7) $$F = \frac{ab}{2 \cdot 0{,}4342945} \log \left(\frac{x_2}{x_1}\right) = 1{,}1512925 \cdot ab \cdot \log \left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

weder jene verschwindend klein werden, noch diese in das Unendliche wachsen. Schließlich müssen beide zusammenfallen, weil für ihre Differenz aus der oben zu Grunde gelegten Ungleichung

$$m a^{m-1} > a - b) > a^m - b^m$$

sich als obere Grenze $\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ ergibt, welcher Wert bei unendlich werdendem n, insofern der Faktor $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ endlich bleibt, gegen die Null konvergiert. Beide Funktionen haben folglich einen gemeinschaftlichen Grenzwert, für welchen, wenn er mit e bezeichnet wird, Näherungsresultate aus der Ungleichung

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n < e < \left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

abgeleitet werden können. — Betrachtet man nun, daß der Ausdruck $\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$ auch in der Form $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$ geschrieben werden kann, so läßt sich, wenn man ω an die Stelle eines unendlich werdenden n setzt, das Resultat der vorhergehenden Betrachtung in der Gleichung

$$\lim \left\{\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^{\omega}\right\} = e$$

zusammenfassen, wobei ω ebensowohl einen positiven als einen negativen Wert haben kann.

ferner erhält man bei Benutzung natürlicher Logarithmen, wenn man dieselben durch Vorsetzen des Buchstabens l vor den Logarithmanden bezeichnet, den einfacheren Ausdruck:

$$8) \qquad F = \frac{1}{2}\, ab \cdot l\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

Da der Flächeninhalt in der Formel 6), sowie in den davon abgeleiteten Gleichungen 7) und 8) außer von den darin enthaltenen konstanten Werten nur von dem Abscissenverhältnisse $\frac{x_2}{x_1}$ abhängig gemacht ist, so folgt, daß bei einer gegebenen Hyperbel Flächenstreifen der betrachteten Art gleichen Inhalt besitzen müssen, wenn dieses Verhältnis in denselben einen gleichen Wert hat. Hieraus ergibt sich weiter, daß die in Fig. 47 angewendete Zerlegung der Streifenfläche in Teile gleichen Inhaltes lediglich darauf hinauskommt, den aufeinander folgenden Abscissen Werte zu geben, welche eine geometrische Progression bilden.

Zum Schluß ist noch zu bemerken, daß mit Rücksicht auf die aus der Gleichung 2) im § 28 hervorgehende, umgekehrte Proportionalität zwischen x und y bei allen in diesem Paragraphen angestellten Untersuchungen an die Stelle des Abscissenverhältnisses $\frac{x_2}{x_1}$ auch das Ordinatenverhältnis $\frac{y_1}{y_2}$ gesetzt werden kann.

Achtes Kapitel.

Die Linien zweiten Grades.

§ 30. Diskussion der allgemeinen Gleichung der Linien zweiten Grades.

Nachdem wir in den vorhergehenden Kapiteln einige Linien näher kennen gelernt haben, deren Gleichungen sämtlich dem zweiten Grade angehörten, bleibt noch die Frage zu entscheiden, ob außer ihnen andere Linien derselben Ordnung existieren oder ob mit Untersuchung der Kegelschnitte der zweite Grad völlig erschöpft ist. Wir haben zu diesem Zwecke die allgemeinste Gleichung zweiten Grades zwischen den Koordinaten x und y zu betrachten, wofür bereits früher (§ 9 Nr. 18) die Form

$$1) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

festgestellt wurde, und zu untersuchen, welche verschiedenen Gebilde dadurch dargestellt werden könnnen.

Wir wollen dabei zunächst voraussetzen, daß die Gleichung in Bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem gegeben ist.

A. Bestimmung der Richtung der Hauptachsen.

Geht man entweder von der Scheitelgleichung der Kegelschnitte (§ 13) oder von der Gleichung der Ellipse und der Hyperbel in Bezug auf die Hauptachsen durch die allgemeinen Veränderungsformeln für rechtwinklige Koordinaten auf ein rechtwinkliges System mit willkürlichem Anfangspunkte und willkürlicher Richtung der Abscissenachse über, so enthält die neue Gleichung alle Glieder der allgemeinen Gleichung; insbesondere enthält sie das Glied mit dem Produkte xy, das weder in den Scheitelgleichungen noch in den Hauptachsengleichungen vorkommt. Das Auftreten dieses Gliedes ist nicht durch die Veränderung des Nullpunktes, sondern nur durch die Veränderung der Achsenrichtung

verursacht. Denn wenn man nur eine Verschiebung der Achsen vornimmt, so hat man x und y durch Ausdrücke von der Form $x + a$, $y + b$ zu ersetzen; bei dieser Änderung kommt kein Glied mit xy zu stande.

Wir suchen daher zunächst durch **Drehung des Koordinatensystems zu einer neuen Gleichung zu gelangen, in welcher das mit dem Koordinatenprodukte xy multiplizierte Glied fehlt.**

Bildet die neue Abscissenachse mit der alten den Winkel φ, und werden im neuen Systeme die Koordinaten mit ξ und η bezeichnet, so hat man zu ersetzen:

$$2) \quad \begin{cases} x \text{ durch } \cos\varphi \cdot \xi - \sin\varphi \cdot \eta, \\ y \quad \text{„} \quad \sin\varphi \cdot \xi + \cos\varphi \cdot \eta, \end{cases}$$

mithin

$$3) \quad \begin{cases} x^2 \text{ durch } \cos^2\varphi \cdot \xi^2 + \sin^2\varphi \cdot \eta^2 - 2\sin\varphi\cos\varphi \cdot \xi\eta, \\ y^2 \quad \text{„} \quad \sin^2\varphi \cdot \xi^2 + \cos^2\varphi \cdot \eta^2 + 2\sin\varphi\cos\varphi \cdot \xi\eta, \\ xy \quad \text{„} \quad \sin\varphi\cos\varphi \cdot \xi^2 - \sin\varphi\cos\varphi \cdot \eta^2 + (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \cdot \xi\eta. \end{cases}$$

Durch diese Änderungen erhält man eine neue Gleichung von der Form

$$b_{11}\xi^2 + 2b_{12}\xi\eta + 2b_{13}\xi + 2b_{22}\eta_{2} + 2b_{23}\eta + b_{33} = 0,$$

wobei

$$4) \quad \begin{cases} b_{11} = a_{11}\cos^2\varphi + 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi, \\ b_{12} = -(a_{11} - a_{22})\sin\varphi\cos\varphi + a_{12}(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi), \\ b_{22} = a_{11}\sin^2\varphi - 2a_{12}\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\cos^2\varphi, \\ b_{13} = a_{13}\cos\varphi + a_{23}\sin\varphi, \\ b_{23} = -a_{13}\sin\varphi + a_{23}\cos\varphi. \end{cases}$$

Der Koeffizient b_{12} verschwindet, wenn man φ so wählt, daß

$$a_{12}\cos 2\varphi = \tfrac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\sin 2\varphi,$$

woraus folgt

$$\tan 2\varphi = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}.$$

Dieser Wert wird nur dann unbestimmt, wenn $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$; dieser Fall kann aber außer Betracht bleiben, weil alsdann die gegebene Gleichung aufhört, quadratisch zu sein.

Für $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ ergeben sich aus $\tan 2\varphi$ die Werte

$$\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}, \quad \cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}.$$

Den Radikand kann man schreiben:

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,(a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2);$$

setzt man zur Abkürzung

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

so erhält man

$$5)\quad \sin 2\varphi = \frac{2\,a_{12}}{\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,\Delta}}, \quad \cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,\Delta}}.$$

Jeder der unendlich vielen Winkel 2φ, welche der Bestimmung 5) entsprechen, macht b_{12} verschwinden; wir wollen von ihnen denjenigen auswählen, der zwischen 0^0 und 360^0 enthalten ist, und dessen Sinus und Kosinus die Werte 5) haben, wenn in denselben die Quadratwurzel positiv gerechnet wird.

Um zunächst die Koeffizienten b_{11} und b_{22} zu berechnen, verbinden wir die erste und dritte der Gleichungen 4) durch Addition und Subtraktion; dies ergibt

$$\begin{aligned} b_{11} + b_{22} &= a_{11} + a_{22}, \\ b_{11} - b_{22} &= (a_{11} - a_{22}) \cos 2\varphi + 2\,a_{12} \sin 2\varphi \\ &= \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,\Delta}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$6)\quad \begin{cases} b_{11} = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,\Delta}\right), \\ b_{22} = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\,\Delta}\right). \end{cases}$$

Die veränderte Gleichung ist daher

$$7)\quad \begin{aligned} b_{11}\,\xi^2 + b_{22}\,\eta^2 &+ 2\,(a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi)\,\xi \\ &+ 2\,(-\,a_{13} \sin \varphi + a_{23} \cos \varphi)\,\eta + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten b_{11} und b_{22} verschwinden nur dann beide, wenn $\Delta = 0$ und $a_{11} + a_{22} = 0$, d. i. wenn $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$.

Wenn $\Delta = 0$ ist, aber a_{11} und a_{22} nicht beide verschwinden, so verschwindet nur einer der beiden Koeffizienten b_{11} oder b_{22}. Ohne die Allgemeinheit unserer Untersuchung zu beschränken, können wir voraussetzen, daß die Summe $a_{11} + a_{22}$ nicht negativ ist*). Aus $\Delta = 0$ folgt alsdann, daß auch $b_{22} = 0$ ist.

*) Ist eine Gleichung zweiten Grades gegeben, bei welcher die Summe der Koeffizienten von x^2 und y^2 negativ ist, so multipliziere man dieselbe mit $(-\,1)$; man erhält dann eine neue Gleichung, in welcher $a_{11} + a_{22}$ positiv ist.

§ 31. Fortsetzung.

B. Ableitung der Mittelpunktsgleichung.

Die auf die Hauptachsen bezogenen Gleichungen der Ellipse und Hyperbel haben keine Glieder, die in Bezug auf die Koordinaten vom ersten Grade sind; verändert man die Koordinaten durch Drehung, so entstehen auch dadurch keine linearen Glieder. Wir versuchen nun, durch geeignete Verschiebung des Koordinatensystems aus einer allgemeinen Gleichung zweiten Grades zu einer Gleichung überzugehen, die keine linearen Glieder enthält.

Wenn sich eine solche Änderung erreichen läßt, so ist der neue Nullpunkt der Mittelpunkt des durch die Gleichung dargestellten Gebildes. Denn die Gleichung

$$1)\qquad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{33} = 0$$

ändert sich nicht, wenn man x und y durch $-x$ und $-y$ ersetzt; liegt also der Punkt (x, y) auf der Kurve 1), so enthält sie auch den Punkt $(-x, -y)$; die Strecke dieser beiden Punkte enthält, wie man sofort erkennt, den Nullpunkt, und wird von ihm halbiert, d. i. der Nullpunkt ist der Mittelpunkt der Kurve 1).

Führt man in der allgemeinen Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

eine Koordinatenverschiebung gemäß der Änderungsformeln

$$x = \xi + u, \quad y = \eta + v$$

aus, so erhält man

$$2)\qquad \begin{aligned} &a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 \\ &+ 2(a_{11}u + a_{12}v + a_{13})\xi + 2(a_{12}u + a_{22}v + a_{23})\eta \\ &+ a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}u + a_{22}v^2 + 2a_{23}v + a_{33} = 0. \end{aligned}$$

Die linearen Glieder verschwinden, wenn

$$3)\qquad \begin{aligned} a_{11}u + a_{12}v + a_{13} &= 0, \\ a_{12}u + a_{22}v + a_{23} &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt

$$4)\qquad u = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

wobei

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Das Absolutglied der Gleichung 2) kann man schreiben

$$(a_{11}u + a_{12}v + a_{13})u + (a_{12}u + a_{22}v + a_{23})v + a_{13}u + a_{23}v + a_{33};$$

zufolge 3) ist es also

$$a_{13}u + a_{23}v + a_{33}.$$

Setzt man hier die Werte 4) ein, so erkennt man, daß

$$5)\qquad a_{13}u + a_{23}v + a_{33} = \frac{1}{\Delta}(a_{13}\Delta_1 + a_{23}\Delta_2 + a_{33}\Delta) = \frac{D}{\Delta},$$

wobei

$$D = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Ist $D = 0$, so zerfällt die veränderte Gleichung

$$a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 = 0$$

in zwei lineare Gleichungen

$$\frac{1}{a_{11}}\{a_{11}\xi + (a_{12} + \sqrt{-\Delta})\eta\}\{a_{11}\xi + (a_{12} - \sqrt{-\Delta})\eta\} = 0.$$

Die Bedingung $D = 0$ zeigt daher an, daß das Gebilde zweiter Ordnung aus zwei Geraden besteht, deren Gleichungen sind

$$6)\qquad \begin{aligned} a_{11}\xi + (a_{12} + \sqrt{-\Delta})\eta &= 0, \\ a_{11}\xi + (a_{12} - \sqrt{-\Delta})\eta &= 0. \end{aligned}$$

Ist $\Delta < 0$, so sind diese Geraden **reell und verschieden**; ist $\Delta > 0$, so sind die linken Seiten konjugiert komplex, und man sagt alsdann, daß sie zwei konjugiert komplexe Gerade darstellen, die außer dem Nullpunkte keine weiteren reellen Punkte haben; ist $\Delta = 0$, so sind die Wurzeln der Gleichungen 3) unendlich groß oder unbestimmt; man kann daher die Veränderung nicht ohne weiteres vornehmen; wir verweisen diesen Fall in den nächsten Abschnitt.

Ist D von Null verschieden, so ist die Gleichung der Kurve

$$7)\qquad a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2 + \frac{D}{\Delta} = 0.$$

Die beiden Geraden 6) haben für die Kurve eine ausgezeichnete Bedeutung. Setzt man nämlich den aus einer der Gleichungen 6) folgenden Wert von η oder ξ in die Kurvengleichung ein, so er-

halten die drei ersten Glieder den Koordinatenfaktor ξ^2 bez. η^2 multipliziert mit einem Koeffizienten, der identisch verschwindet. Der Gleichung wird also nur durch die Annahme

$$\xi = \eta = \infty$$

genügt. Hieraus erkennt man, daß die Geraden 6) die Asymptoten der Kurve sind. Soll also die Gleichung 7) einer Ellipse bez. Hyperbel angehören, so muß die Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

zwei komplexe, bez. reelle Gerade ergeben.

Wir ändern nun die Gleichung 7) durch Drehung der Achsen um den in § 30 berechneten Winkel φ. Werden die neuen Koordinaten wieder mit x, y bezeichnet, so erhält man die Gleichung:

$$8)\qquad b_{11}x^2 + b_{22}y^2 + \frac{D}{\varDelta} = 0,$$

wobei nach § 30, Nr. 6

$$9)\qquad \begin{cases} b_{11} = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\varDelta}\right), \\ b_{22} = \frac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\varDelta}\right). \end{cases}$$

Nach der in § 30 gemachten Voraussetzung ist $a_{11} + a_{22} \geq 0$, und die Quadratwurzel positiv gerechnet.

Daher ist b_{11} in jedem Falle positiv, während das Vorzeichen von b_{22} von dem Vorzeichen von $\varDelta$ in der Weise abhängt, daß $b_{22} > 0$, wenn $\varDelta > 0$, dagegen $b_{22} < 0$, wenn $\varDelta < 0$, und $b_{22} = 0$, wenn $\varDelta = 0$*).

Ist nun $\varDelta > 0$, $D < 0$, so sind in der aus 8) abgeleiteten Gleichung

$$10)\qquad \frac{b_{11}\varDelta}{-D}x^2 + \frac{b_{22}\varDelta}{-D}y^2 - 1 = 0$$

die Koeffizienten von x^2 und y^2 positiv: die Gleichung stellt daher eine Ellipse dar. Ist dagegen $\varDelta > 0$ und $D > 0$, so schreibt man

$$11)\qquad \frac{b_{11}\varDelta}{D}x^2 + \frac{b_{22}\varDelta}{D}y^2 - 1 = 0,$$

worin die Koeffizienten wieder positiv sind. Dieser Gleichung kann, da links nur positive Glieder stehen, durch keinen reellen Punkt

*) Da nach der Voraussetzung $a_{11} + a_{22}$ nicht negativ ist, so ist der positive Wert $\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2} = a_{11} + a_{22}$.

genügt werden. Um des Zusammenhangs willen sagt man, daß sie in diesem Falle eine imaginäre Ellipse darstellt.

Ist $\Delta < 0$, $D < 0$, so ergibt sich

$$12)\qquad \frac{b_{22}\Delta}{-D}\,y^2 - \frac{b_{11}\Delta}{D}\,x^2 - 1 = 0,$$

während man im Falle $\Delta < 0$, $D > 0$ schreibt:

$$13)\qquad \frac{b_{11}\Delta}{D}\,x^2 - \frac{b_{22}\Delta}{D}\,y^2 - 1 = 0;$$

beide Gleichungen stellen Hyperbeln dar; bei 12) fällt die Hauptachse in die Ordinatenachse, bei 13) in die Abscissenachse.

§ 32. Schluß.

Der Parabelfall, $\Delta = 0$. Aus der Voraussetzung folgt

$$1)\qquad a_{12}^2 = a_{11}a_{22}.$$

$$2)\qquad D = a_{13}\Delta_1 + a_{23}\Delta_2 = 2a_{12}a_{23}a_{13} - a_{13}^2 a_{22} - a_{23}^2 a_{11}.$$

Die beiden Zahlen a_{11} und a_{22} können nicht zugleich verschwinden; denn da nach 1) alsdann auch $a_{12} = 0$ ist, so würde die Kurvengleichung kein quadratisches Glied enthalten; ferner folgt aus $a_{11} + a_{22} > 0$ und 1), daß keine der beiden Zahlen negativ sein kann. Bildet man

$$\Delta_1^2 = a_{12}^2 a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{22}a_{23} + a_{13}^2 a_{22}^2,$$
$$\Delta_2^2 = a_{11}^2 a_{23}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{13}a_{23} + a_{12}^2 a_{13}^2,$$

so ergibt sich mit Rücksicht auf 1):

$$3)\qquad \Delta_1^2 = a_{11}a_{22}a_{23}^2 - 2a_{12}a_{13}a_{22}a_{23} + a_{13}^2 a_{22}^2 = -a_{22}D,$$
$$4)\qquad \Delta_2^2 = a_{11}^2 a_{23}^2 - 2a_{11}a_{12}a_{13}a_{23} + a_{11}a_{22}a_{13}^2 = -a_{11}D.$$

Hieraus folgt, daß D nicht positiv sein kann.

Ist $D = 0$, so folgt aus 3) und 4), daß auch $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, also

$$5)\qquad a_{12}a_{23} = a_{13}a_{22}, \quad a_{11}a_{23} = a_{12}a_{13}.$$

Die Kurvengleichung erweitere man mit a_{11} oder a_{22} nach Belieben, oder, wenn eine der beiden Zahlen verschwindet, mit der andern; man erhält dann in Rücksicht auf 1) und 5) die beiden Formen

$$6)\qquad \begin{cases} (a_{11}x + a_{12}y + a_{13})^2 - (a_{13}^2 - a_{11}a_{33}) = 0, \\ (a_{12}x + a_{22}y + a_{23})^2 - (a_{23}^2 - a_{22}a_{33}) = 0. \end{cases}$$

Zufolge 1) und 5) sind sie gleichbedeutend, wenn a_{11} und a_{22} nicht verschwinden; im Gegenfalle ist eine von beiden identisch. Zieht man die Wurzeln, so erhält man

$$7) \quad \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = \pm\sqrt{a_{13}^2 - a_{11}a_{33}}, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = \pm\sqrt{a_{23}^2 - a_{22}a_{33}}. \end{cases}$$

Hieraus erkennt man, daß die gegebene Gleichung in diesem Falle zwei parallele Gerade darstellt, die je nach dem Vorzeichen der Grundzahl der Wurzel reell und verschieden, oder reell und gleich, oder konjugiert komplex sind.

Ist $D < 0$, so drehen wir das Koordinatensystem um den in § 30 berechneten Winkel φ, für den wir die Formeln verwenden:

$$\sin 2\varphi = -\frac{2a_{11}a_{12}}{a_{11}^2 + a_{12}^2}, \quad \cos 2\varphi = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}^2 + a_{12}^2},$$

die aus § 30 Nr. 5) durch Erweiterung mit a_{11} unter Berücksichtigung von 1) und Zeichenwechsel*) hervorgehen; aus ihnen folgt

$$\sin\varphi = \pm\frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}, \quad \cos\varphi = \pm\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}.$$

Den Winkel 2φ können wir zwischen 0^0 und 360^0 annehmen; alsdann ist $\sin\varphi > 0$ und $\cos\varphi$ hat dasselbe Zeichen wie $\sin 2\varphi$. Hieraus ergibt sich betreffs der Zeichen

$$8) \quad \sin\varphi = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}, \quad \cos\varphi = -\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}.$$

Unter Verwendung dieser Werte erhält man für das neue System die Gleichung

$$9) \quad \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{a_{11}}\eta^2 - \frac{2\Delta_2}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}\xi - 2\cdot\frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}\eta + a_{33} = 0.$$

Hierfür kann man schreiben

$$10) \quad \frac{a_{11}^2 + a_{12}^2}{a_{11}}\left\{\eta - \frac{a_{11}(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23})}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}^{\,3}}\right\}^2$$

$$= \frac{2\Delta_2}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}\left\{\xi - \frac{a_{33}(a_{11}^2 + a_{12}^2)^2 - a_{11}(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23})^2}{2\Delta_2\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}^{\,3}}\right\}.$$

*) Der Zeichenwechsel ist zulässig, da die Bedingung $b_{12} = 0$ (§ 30.4) dadurch nicht gestört wird.

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Hauptachse in der Abscissenachse liegt; der Parameter ist dem absoluten Werte nach

$$\frac{2\Delta_2 a_{11}}{\left(\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}\right)^3},$$

und der Scheitel hat im neuen Systeme die Koordinaten

$$u = \frac{a_{33}(a_{11}^2 + a_{12}^2) - a_{11}(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23})^2}{2\Delta_2\left(\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}\right)^3}, \quad v = \frac{a_{11}(a_{12}a_{13} - a_{11}a_{23})}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}.$$

Die Koordinaten für das alte System ergeben sich durch Anwendung der bekannten Änderungsformeln zu

$$x = \frac{a_{11}(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23})[a_{23}(a_{11}^2 + a_{12}^2) - a_{11}\Delta_2] - a_{12}a_{33}(a_{11}^2 - a_{12}^2)^2}{2\Delta_2(a_{11}^2 + a_{12}^2)^2},$$

$$y = \frac{a_{11}a_{33}(a_{11}^2 + a_{12}^2)^2 - a_{11}(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23})[a_{13}(a_{11}^2 + a_{12}^2) - a_{12}\Delta_2]}{2\Delta_2(a_{11}^2 + a_{12}^2)^2}.$$

Wir sind hiermit am Ende der Untersuchung angelangt, welche geometrische Gebilde durch eine allgemeine Gleichung zweiten Grades dargestellt werden können; es hat sich ergeben, daß außer den Kegelschnitten es keine eigentlichen Kurven zweiter Ordnung gibt, sondern daß jede Gleichung zweiten Grades, wenn sie keinen reellen oder imaginären Kegelschnitt darstellt, in Gebilde erster Ordnung zerfällt, indem sie entweder zwei zusammenfallende oder verschiedene parallele Gerade, oder zwei sich schneidende Gerade darstellt, die reell oder imaginär sein können.

§ 33. Übersicht der Resultate und Anwendung auf schiefwinklige Koordinaten.

Wir fassen die Resultate der Untersuchung in folgender Übersicht zusammen.

Um die geometrische Bedeutung einer Gleichung zweiten Grades zwischen den laufenden Koordinaten eines Punktes zu erkennen, sorge man wenn nötig durch Erweiterung mit -1 dafür, daß die Summe der Koeffizienten von x^2 und y^2 nicht negativ ist. Ist also dann die Gleichung

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

und darin

$$a_{11} + a_{22} \geqq 0,$$

so berechne man zunächst die Größen

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \varDelta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad \varDelta_2 = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{12} \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{13} & a_{23} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

und beachte dann folgende Übersicht:

	$D = 0$	$D < 0$	$D > 0$
$\varDelta = 0$	1. 2 parallele Gerade, reell und verschieden, reell und gleich, oder konj. komplex.	4. Parabel.	
$\varDelta > 0$	2. 2 sich schneidende konjug. komplexe Gerade.	5. Reelle Ellipse.	6. Imaginäre Ellipse.
$\varDelta < 0$	3. 2 sich schneidende reelle Gerade.	7. Hyperbel.	8. Hyperbel.

Zu 1), $\varDelta = 0$, $D = 0$.

Die Gleichungen der Geraden sind (§ 32, Nr. 7):

$$a_{11} x + a_{12} y + a_{13} \mp \sqrt{a_{13}^2 - a_{11} a_{33}} = 0,$$

oder

$$a_{12} x + a_{22} y + a_{23} \mp \sqrt{a_{23}^2 - a_{22} a_{33}} = 0.$$

Zu 2) und 3), $\varDelta \gtrless 0$, $D = 0$.

Die Gleichungen der Geraden sind (§ 31, Nr. 7):

$$a_{11}\left(x - \frac{\varDelta_1}{\varDelta}\right) + (a_{12} + \sqrt{-\varDelta})\left(y - \frac{\varDelta_2}{\varDelta}\right) = 0,$$

$$a_{11}\left(x - \frac{\varDelta_1}{\varDelta}\right) + (a_{12} - \sqrt{-\varDelta})\left(y - \frac{\varDelta_2}{\varDelta}\right) = 0.$$

Im Falle 2) ist nur ihr Schnittpunkt reell:

$$u = \frac{\varDelta_1}{\varDelta}, \quad v = \frac{\varDelta_2}{\varDelta}.$$

Zu 4), $\varDelta = 0$, $D < 0$. Die Achse bildet mit der Abscissenachse den Winkel φ, für den

$$\sin\varphi = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}, \quad \cos\varphi = -\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}},$$

wobei die Wurzel positiv zu nehmen ist; der Scheitel hat die

Koordinaten

$$m = \frac{a_{11}(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23})[a_{23}(a_{11}^2 + a_{12}^2) - a_{11}\Delta_2] - a_{12}a_{23}(a_{11}^2 + a_{12}^2)^2}{2\Delta_2(a_{11}^2 + a_{12}^2)^2},$$

$$n = \frac{a_{11}a_{23}(a_{11}^2 + a_{12}^2)^2 - a_{11}(a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23})[a_{13}(a_{11}^2 + a_{12}^2) - a_{12}\Delta_2]}{2\Delta_2(a_{11}^2 + a_{12}^2)^2};$$

der Parameter hat den absoluten Wert von

$$\frac{2\Delta_2 a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 - a_{12}^2}}.$$

Zu 5), $\Delta > 0$, $D < 0$. Die Koordinaten des Mittelpunktes sind u, v; die Halbachsen

$$\sqrt{\frac{-D}{b_{11}\Delta}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{-D}{b_{22}\Delta}};$$

hierin ist nach § 30, Nr. 6)

$$b_{11} = \tfrac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} + \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\Delta}\right),$$

$$b_{22} = \tfrac{1}{2}\left(a_{11} + a_{22} - \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\Delta}\right),$$

wobei die Wurzel positiv zu rechnen ist.

Die erstgenannte Halbachse bildet mit der positiven Abscissenachse den Winkel φ, für den

$$\sin 2\varphi = \frac{2a_{12}}{\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\Delta}}, \quad \cos 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\Delta}}.$$

Zu 7), $\Delta < 0$, $D < 0$. Der Mittelpunkt hat die Koordinaten u, v; die Nebenachse bildet mit der Abscissenachse den Winkel φ, die halbe Haupt- und Nebenachse sind

$$a = \sqrt{\frac{-D}{b_{22}\Delta}}, \qquad b = \sqrt{\frac{D}{b_{11}\Delta}}.$$

Zu 8), $\Delta < 0$, $D > 0$. Der Mittelpunkt hat die Koordinaten u, v; die Hauptachse bildet mit der Abscissenachse den Winkel φ; die halbe Haupt- und Nebenachse sind

$$a = \sqrt{\frac{-D}{b_{11}\Delta}}, \qquad b = \sqrt{\frac{D}{b_{22}\Delta}}.$$

Es dürfte nicht überflüssig sein, die gegebenen Unterscheidungszeichen an einigen Zahlenbeispielen zu erläutern.

1. Die Ellipse mit den Halbachsen 3 und 2 hat die Gleichung

$$4\xi^2 + 9\eta^2 - 36 = 0$$

Für ein neues System, das aus dem alten durch Drehung um 30^0 hervorgeht, ergeben die Änderungsformeln

$$\xi = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{x} - \frac{1}{2}\mathfrak{y}, \qquad \eta = \frac{1}{2}\mathfrak{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathfrak{y}$$

die neue Gleichung

$$21\mathfrak{x}^2 - 10\sqrt{3}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + 31\mathfrak{y}^2 - 144 = 0.$$

Verschiebt man dann noch die Achsen, sodaß der Punkt $\mathfrak{x} = 1$, $\mathfrak{y} = 2$ der neue Nullpunkt wird, so hat man zu setzen

$$\mathfrak{x} = x + 1, \qquad \mathfrak{y} = y + 2.$$

und erhält

$$1)\quad 21x^2 - 10\sqrt{3}\cdot xy + 31y^2 + 2(21 - 10\sqrt{3})x + 2(62 - 5\sqrt{3})y$$
$$+ 1 - 20\sqrt{3} = 0.$$

Auf diese Gleichung wenden wir die Kennzeichen an. Hier ist

$$\varDelta = \begin{vmatrix} 21 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & 31 \end{vmatrix} = 576,$$

$$\varDelta_1 = \begin{vmatrix} -5\sqrt{3} & 21 - 10\sqrt{3} \\ 31 & 62 - 5\sqrt{3} \end{vmatrix} = -576,$$

$$\varDelta_2 = \begin{vmatrix} 21 - 10\sqrt{3} & 21 \\ 62 - 5\sqrt{3} & -5\sqrt{3} \end{vmatrix} = -1152, \qquad D = -144\cdot 576.$$

Da $\varDelta > 0$, $D < 0$, so ist 1) eine **reelle Ellipse**. Die Koordinaten des Mittelpunkts sind

$$u = \frac{\varDelta_1}{\varDelta} = -1, \qquad v = \frac{\varDelta_2}{\varDelta} = -2.$$

Aus $a_{11} + a_{22} = 52$, $\sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\varDelta} = 20$ folgen $b_{11} = 36$, $b_{22} = 16$, und daher die Halbachsen

$$\sqrt{\frac{144\cdot 576}{36\cdot 576}} = 2, \qquad \sqrt{\frac{144\cdot 576}{16\cdot 575}} = 3.$$

Für φ erhält man

$$\sin 2\varphi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad \cos 2\varphi = -\tfrac{1}{2};$$

daher ist $2\varphi = 240^0$, $\varphi = 120^0$.

Diese Ergebnisse stimmen in allen Stücken mit den Voraussetzungen überein.

II. Die Geraden des Nullpunktes, die mit der Abscissenachse die Winkel 30° und 60° bilden, haben die Normalgleichungen

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 0, \qquad \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0.$$

Der Ort der Punkte, für die das Produkt der Abstände von diesen Geraden so groß ist, wie das Quadrat des Abstands von einer im Abstande $x = 2$ mit der y-Achse gleichgerichteten Geraden, hat daher die Gleichung

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) = (x-2)^2,$$

oder

$$-(4-\sqrt{3})\cdot x^2 - 4xy + \sqrt{3}\cdot y^2 + 16x - 16 = 0.$$

Man hat daher

$$\Delta = -1 - 4\sqrt{3}, \quad \Delta_1 = -8\sqrt{3}, \quad \Delta_2 = -16, \quad D = 16,$$

der Kegelschnitt ist daher eine Hyperbel. Ferner ist

$$b_{11} = -2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 2.5605,$$
$$b_{22} = -2 + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} = -3.0963,$$
$$\sin 2\varphi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \cos 2\varphi = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$
$$2\varphi = 225^0, \qquad \varphi = 112\tfrac{1}{2}^0,$$
$$a = 0.88778, \qquad b = 0.80732.$$

III. Die Parabelgleichung

$$\mathfrak{y}^2 = 6\mathfrak{x}$$

geht durch die Änderungsformeln

$$\mathfrak{x} = \tfrac{4}{5}x' - \tfrac{3}{5}y', \qquad \mathfrak{y} = \tfrac{3}{5}x' + \tfrac{4}{5}y'$$

über in

$$9x'^2 + 24x'y' + 16y'^2 = 120x' - 90y';$$

ändert man nochmals gemäß

$$x' = x + 3, \qquad y' = y + 2,$$

so ergibt sich

$$9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 109 = 0.$$

Werden hierauf die Regeln angewandt, so erhält man zunächst $\Delta = 0$, erkennt also die **Parabel**. Ferner folgt:

$$\sin\varphi = \tfrac{3}{5}, \qquad \cos\varphi = -\tfrac{4}{5}.$$

Da $\Delta_2 = -1125$, so folgt

$$2p = 6$$

Da

$$a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} = 1275,$$

$$a_{22}(a_{11}^2 + a_{12}^2) - a_{11}\Delta_2 = 790 \cdot 15^2,$$

$$a_{13}(a_{11}^2 + a_{12}^2) + a_{12}\Delta_2 = -69 \cdot 15^2,$$

so erhält man $g = \frac{6}{5}$, $r = \frac{17}{5}$, $m = -3$, $n = -2$, in Übereinstimmung mit der Voraussetzung.

Es hat sich ergeben, daß zwei aus den Koeffizienten der Gleichung zweiten Grades zusammengesetzte Zahlen für den Charakter des durch die Gleichung dargestellten geometrischen Gebildes besonders wichtig sind, nämlich D und Δ; das Verschwinden der ersten Zahl zeigt den Zerfall des Gebildes in zwei gerade Linien an; das Verschwinden der zweiten Zahl ist für die Parabel bezeichnend, und wenn keine der beiden Zahlen verschwindet, so geben die Vorzeichen derselben darüber Aufschluß, ob die Kurve eine Ellipse oder eine Hyperbel ist.

Da nun die geometrischen Beziehungen unabhängig vom Koordinatensysteme sind, so folgt, daß auch die zugehörigen arithmetischen Beziehungen von D und Δ sich beim Übergange aus einem rechtwinkligen Koordinatensysteme zum andern nicht ändern können. Indem wir eine Übertragung der im § 32 angegebenen Kennzeichen auf schiefwinklige Parallelkoordinaten ins Auge fassen, wollen wir zunächst zeigen, wie sich Δ und D ändern, wenn man von einem rechtwinkligen Systeme zu einem andern Parallelkoordinatensysteme mit demselben Anfangspunkte übergeht, und alsdann, welchen Einfluß eine Verschiebung der Achsen auf diese Zahlen hat.

Der Übergang von einem rechtwinkligen Systeme XY zu einem andern Parallelkoordinatensystem ΞH mit demselben Anfangspunkte und beliebigem Koordinatenwinkel erfolgt durch Änderungen von der Form

$$x = \alpha\xi + \beta\eta,$$

$$y = \gamma\xi + \delta\eta.$$

Man hat daher zu ersetzen:

$$\begin{aligned}
x^2 &\text{ durch } \alpha^2\xi^2 + 2\alpha\beta\xi\eta + \beta^2\eta^2,\\
xy &\quad ,, \quad \alpha\gamma\xi^2 + (\alpha\delta + \beta\gamma)\xi\eta + \beta\delta\eta^2,\\
y^2 &\quad ,, \quad \gamma^2\xi^2 + 2\gamma\delta\xi\eta + \delta^2\eta^2.
\end{aligned}$$

Werden die Koeffizienten der veränderten Gleichung mit $b_{11}, b_{12}, \ldots b_{33}$ bezeichnet, so ist

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \alpha^2 a_{11} + 2\alpha\gamma a_{12} + \gamma^2 a_{22},\\
b_{12} &= \alpha\beta a_{11} + (\alpha\delta + \beta\gamma) a_{12} + \gamma\delta a_{22},\\
b_{13} &= \alpha a_{13} + \gamma a_{23},\\
b_{22} &= \beta^2 a_{11} + 2\beta\delta a_{12} + \delta^2 a_{22},\\
b_{23} &= \beta a_{13} + \delta a_{23},\\
b_{33} &= a_{33}.
\end{aligned}$$

Bildet man mit Hilfe dieser Zahlen

$$\varDelta' = b_{11} b_{22} - b_{12}^2,$$

so heben sich die mit a_{11}^2, $a_{11}a_{12}$, a_{22}^2 und $a_{12}a_{22}$ multiplizierten Glieder auf; die übrigen ergeben

$$\varDelta' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \varDelta.$$

Um D' zu berechnen, bilden wir zunächst

$$D' - b_{33}\varDelta' = b_{11} b_{23}^2 + b_{22} b_{13}^2 - 2 b_{12} b_{13} b_{23}.$$

Man erkennt leicht, daß sich die Glieder aufheben, welche mit $a_{11}a_{13}a_{23}$, $a_{22}a_{13}a_{23}$, $a_{13}^2 a_{12}$ und $a_{23}^2 a_{12}$ multipliziert sind. Die übrig bleibenden ergeben

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 (a_{11} a_{23}^2 + a_{22} a_{13}^2 - 2 a_{12} a_{13} a_{23}).$$

Daher ist

$$D' = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2 D.$$

Die Größe $(\alpha\delta - \beta\gamma)$ bezeichnet man als die Änderungsdeterminante. Die neuen Größen $\varDelta'$ und D' sind daher die Produkte aus den alten und aus dem Quadrate der Änderungsdeterminante.

Bei einer Verschiebung der Achsen hat man die Änderungen

$$\begin{aligned}
x &= \xi + m,\\
y &= \eta + n.
\end{aligned}$$

Daher ist zu ersetzen:

$$\begin{aligned}
x^2 &\text{ durch } \xi^2 + 2m\xi + m^2,\\
y^2 &\quad ,, \quad \eta^2 + 2n\eta + n^2,\\
xy &\quad ,, \quad \xi\eta + n\xi + m\eta + mn.
\end{aligned}$$

In der neuen Gleichung haben die quadratischen Glieder dieselben Koeffizienten, wie in der gegebenen Gleichung. Ferner ist:

$$b_{13} = m a_{11} + n a_{12} + a_{13},$$
$$b_{23} = m a_{12} + n a_{22} + a_{23},$$
$$b_{33} = m^2 a_{11} + 2 m n a_{12} + 2 m a_{13} + n^2 a_{22} + 2 n a_{23} + a_{33}.$$

Berechnet man mit Hilfe dieser Werte

$$D' - b_{33} \varDelta = - a_{11} b_{23}^2 - a_{22} b_{13}^2 + 2 a_{12} b_{13} b_{23}$$

und faßt rechts der Reihe nach die Glieder zusammen, die mit

$$m^2, \; 2 m n, \; 2 m, \; n^2, \; 2 n$$

multipliziert sind, so erhält man

$$D' - b_{33} \varDelta = D - b_{33} \varDelta;$$

hieraus folgt

$$D' = D.$$

Bei einer parallelen Verschiebung der Koordinatenachsen bleiben daher die Größen $\varDelta$ und D ungeändert.

Insbesondere folgt hieraus: Auch bei Gleichungen zweiten Grades für schiefwinklige Koordinaten zeigt $D = 0$ den Zerfall des Gebildes in zwei getrennte oder zusammenfallende Gerade, $D \gtrless 0$ einen eigentlichen Kegelschnitt an, und zwar eine Ellipse oder eine Hyperbel, je nachdem $\varDelta \gtrless 0$.

§ 34. Bestimmung einer Linie zweiten Grades durch gegebene Peripheriepunkte.

Da die allgemeine Gleichung zweiten Grades zwischen den veränderlichen Größen x und y den allgemeinsten Ausdruck für die Gleichung der Kegelschnitte und der darin mit eingeschlossenen als Grenzwerte auftretenden geradlinigen Gebilde enthält, so müssen diejenigen geometrischen Eigenschaften, welche aus der Untersuchung dieser Gleichung hervorgehen, allen Linien dieser Art gemeinschaftlich angehören. Zur Vervollständigung der aus der speziellen Betrachtung der Kegelschnitte bereits bekannten Eigenschaften mögen noch die folgenden Erörterungen hinzutreten.

Die Gleichung zweiten Grades, welche in ihrer allgemeinsten Form, nämlich in

$$a_{11} x^2 + 2 a_{12} x y + 2 a_{13} x + a_{22} y^2 + 2 a_{23} y + a_{33} = 0$$

die sechs beständigen Größen $a_{11}, a_{12}, \ldots a_{33}$ enthält, läßt sich, wenn man beiderseitig durch eine dieser sechs Größen (die jedoch von Null verschieden sein muß) dividiert, immer so umgestalten, daß sie nur noch von fünf Konstanten, nämlich von fünf der zwischen den Koeffizienten bestehenden Verhältnisse, abhängig ist. Nehmen wir z. B. an, die Koordinatenachsen seien, was immer möglich ist, so gelegt, daß der Koordinatenanfang nicht mit einem Peripheriepunkte zusammenfällt, so dürfen in 1) nicht x und y gleichzeitig verschwinden; es muß also ein von x und y freies Glied vorhanden sein. Wird durch dieses dividiert, und zur Abkürzung

$$\frac{a_{11}}{a_{33}} = a, \quad \frac{a_{12}}{a_{33}} = b, \quad \frac{a_{13}}{a_{33}} = c, \quad \frac{a_{22}}{a_{33}} = d, \quad \frac{a_{23}}{a_{33}} = e$$

gesetzt, so geht Nr. 1) in die Gleichung

$$2) \qquad ax^2 + 2bxy + 2cx + dy^2 + 2ey + 1 = 0$$

über, welche nur noch die fünf beständigen Größen a, b, c, d, e enthält. Soll nun diese Gleichung für eine bestimmte Linie zweiten Grades gelten, so müssen die darin enthaltenen Konstanten entweder unmittelbar ihrem Zahlwerte nach bekannt sein, oder man muß sie aus gegebenen Bedingungen berechnen können, wozu bekanntlich fünf voneinander unabhängige Bedingungsgleichungen nötig sind. Wählen wir z. B. zur näheren Untersuchung den Fall, daß die Linie durch fünf gegebene Peripheriepunkte hindurchgehen soll, so kommt es hierbei nur darauf an, die fünf Koeffizienten a, b, c, d, e so zu bestimmen, daß die Gleichung 2) durch die Koordinaten eines jeden der fünf gegebenen Punkte befriedigt wird.

Ist $x_1 y_1$ einer dieser fünf Punkte, und denken wir uns, wodurch der Allgemeinheit der Untersuchung kein Abbruch geschieht, das Koordinatensystem so gelegt, daß für die aufzusuchende Linie eine Gleichung von der Form 2) Anwendung finden kann, so muß dieser Gleichung Genüge geschehen, wenn in ihr x mit x_1 und y mit y_1 vertauscht wird. Man hat also für die Unbekannten a, b, c, d und e die Bedingung:

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + 2cx_1 + dy_1^2 + 2ey_1 + 1 = 0.$$

Durch jeden andern gegebenen Punkt wird hierzu eine Gleichung derselben Form, mit denselben Konstanten und nur geänderten

Werten von x und y, gefügt; fünf Punkte reichen also aus, die gesuchten Koeffizienten zu bestimmen. Beachten wir nun, daß alle hierzu aufgestellten Gleichungen in Beziehung auf ihre Unbekannten vom ersten Grade sind, so folgt, daß jede dieser Größen einen reellen und eindeutigen Wert erhalten muß, vorausgesetzt, daß die gegebenen Gleichungen voneinander unabhängig sind. Hieraus folgt: Zur Bestimmung einer Kurve zweiten Grades sind im allgemeinen fünf Peripheriepunkte nötig und ausreichend; **zwei Kegelschnitte können also, ohne zusammenzufallen, nicht mehr als vier Punkte gemein haben.**

Verfährt man, um die Gleichung eines Kegelschnittes zu ermitteln, welcher durch fünf Punkte hindurchgehen soll, in der angegebenen Weise, so lassen sich durch geschickte Wahl des Koordinatensystems noch mancherlei Rechnungsabkürzungen anbringen; dessenungeachtet bleibt die Operation nicht frei von Weitläufigkeiten. Ein anderes Verfahren zur Lösung der erwähnten Aufgabe liefert die folgende Betrachtung.

Werden die Gleichungen zweier Linien zweiten Grades durch Addition verbunden, nachdem vorher die eine dieser Gleichungen mit einem unbestimmten Faktor multipliziert wurde, so entsteht wieder eine Gleichung zweiten Grades, welche von denselben x und y befriedigt wird, die den beiden ersten Gleichungen Genüge leisten. Die durch die neue Gleichung dargestellte Linie muß daher durch alle diejenigen Punkte gehen, welche den beiden ersten Linien gemein waren. Um diese Bemerkung zur Lösung der jetzt in Rede stehenden Aufgabe nutzbar zu machen, nämlich die Gleichung eines Kegelschnittes zu finden, welcher durch fünf gegebene Punkte hindurchgeht, ist es nur nötig, daß man zwei Gleichungen zweiten Grades aufstellen kann, welche für vier dieser Punkte Geltung haben. Die angegebene Operation liefert dann, solange der eingeführte Faktor unbestimmt bleibt, den allgemeinen Ausdruck für die Gleichungen aller Kegelschnitte, welche durch diese vier Punkte gelegt werden können. Schließlich hat man über den unbestimmten Faktor so zu verfügen, daß auch der fünfte Punkt von der Gleichung getroffen wird. Wir wollen diese Rechnung durchführen, indem wir dabei den Koordinatenachsen eine solche Lage geben, daß die Resultate möglichst vereinfacht werden.

Einer der gegebenen Punkte, den wir P_1 nennen wollen, sei

Koordinatenanfang, ein zweiter, P_2, liege in der x-Achse mit den Koordinaten a und 0. Durch den dritten Punkt P_3 werde die y-Achse gelegt, seine Koordinaten sind 0 und b; der vierte Punkt P_4 hat die Koordinaten m und n. Die Gleichung der Geraden $P_2 P_4$ lautet dann (vgl. § 5 Nr. 10):

$$y = \frac{n}{m-a}(x-a) \quad \text{oder} \quad nx + (a-m)y - an = 0,$$

und die von $P_3 P_4$:

$$y - b = \frac{n-b}{m}x \quad \text{oder} \quad (b-n)x + my - bm = 0.$$

Durch Verbindung dieser beiden Gleichungen mit den für die Koordinatenachsen geltenden

$$x = 0 \quad \text{und} \quad y = 0$$

ergibt sich

$$3) \qquad x\{nx + (a-m)y - an\} = 0$$

als Gleichung zweiten Grades für das System der beiden Geraden $P_1 P_3$ und $P_2 P_4$, und

$$4) \qquad y\{(b-n)x + my - bm\} = 0$$

für das System der Geraden $P_1 P_2$ und $P_3 P_4$. Die beiden Gleichungen 3) und 4) werden von allen vier Punkten befriedigt; die Gleichung

$$5) \quad x\{nx + (a-m)y - an\} + \lambda y\{(b-n)x + my - bm\} = 0,$$

in welcher λ einen beliebigen endlichen Faktor bedeutet, drückt daher eine beliebige Linie zweiten Grades aus, welche durch dieselben vier Punkte hindurchgeht. Soll nun diese Linie noch einen fünften Punkt enthalten, in welchem $x = p$ und $y = q$ ist, so muß auch

$$p\{np + (a-m)q - an\} + \lambda q\{(b-n)p + mq - bm\} = 0$$

sein, woraus in Verbindung mit 5) der unbestimmte Faktor λ entfernt werden kann. Setzen wir zur Abkürzung

$$P = p\{np + (a-m)q - an\},$$

$$Q = q\{(b-n)p + mq - bm\},$$

so erhält der gesuchte Kegelschnitt die Gleichung:

$$6) \quad Qx\{nx + (a-m)y - an\} - Py\{(b-n)x + my - bm\} = 0.$$

Hierin kann nach Potenzen von x und y geordnet und durch Anwendung der für die einzelnen Linien zweiten Grades gefundenen

Unterscheidungsmerkmale in jedem einzelnen Falle entschieden werden, welche besondere Art der Kegelschnitte in Frage kommt.

Wenn zu der Gleichung 5), welche den allgemeinen Ausdruck für die Gleichungen aller Linien zweiten Grades enthält, die durch die Punkte P_1, P_2, P_3 und P_4 hindurchgehen, irgend eine Bedingungsgleichung tritt, mittels deren der unbestimmte Faktor λ einen bestimmten Wert erhält, so wird hierdurch der fünfte Peripheriepunkt ersetzt. Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn die Linie eine Parabel sein soll, indem dann die Bedingung $\Delta = 0$ oder $a_{12}^2 = a_{11} a_{12}$ (vgl. § 32) erfüllt werden muß. Wir erkennen hieraus, daß zur Bestimmung einer Parabel vier Punkte ausreichen müssen.

Wird Nr. 5) nach Potenzen von x und y geordnet, so entsteht die Gleichung:

$$7)\quad nx^2 + \{a - m + \lambda(b-n)\}xy - anx + \lambda m y^2 - bm\lambda y = 0,$$

welche nur dann einer Parabel angehören kann, wenn der Bedingung

$$\left\{\frac{a - m + \lambda(b-n)}{2}\right\}^2 = \lambda m n$$

oder

$$8)\quad \lambda^2 (b-n)^2 + 2\lambda\{(a-m)(b-n) - 2mn\} + (a-m)^2 = 0$$

Genüge geleistet wird. Da diese letzte Gleichung quadratisch ist, so läßt sie zwei Werte von λ zu und führt zu dem Satze: Durch vier Punkte können im allgemeinen zwei Parabeln gelegt werden. Damit jedoch diese Werte reell und verschieden sind, muß die Bedingung

$$\{(a-m)(b-n) - 2mn\}^2 - (a-m)^2 (b-n)^2 > 0$$

erfüllt werden. Nach einigen einfachen Umformungen folgt hieraus:

$$4mn(bm + an - ab) > 0.$$

Da es nun stets möglich ist, das Koordinatensystem so zu legen, daß a, b, m und n positive Größen darstellen, so können wir unter Voraussetzung dieser Lage der Koordinatenachsen in der letzten Ungleichung durch $4abmn$ dividieren; dann ergibt sich:

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} > 1.$$

Mit Rücksicht auf den Umstand, daß die Gleichung

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} = 1$$

Geltung findet, sobald der Punkt P_4 in der Geraden $P_2 P_3$ gelegen ist, kann hieraus leicht hergeleitet werden, daß die beiden Parabeln nur dann möglich sind, wenn sich P_4 außerhalb der Fläche des Dreieckes befindet, welches die drei andern gegebenen Punkte zu Eckpunkten hat. — Der Fall, in welchem die Gleichung 8) zwei gleiche reelle Wurzeln besitzt, führt auf die Bedingung

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} = 1,$$

läßt aber keine Parabel zu, weil dann drei der gegebenen Punkte in einer geraden Linie liegen. Durch vier Punkte sind also immer zwei Parabeln bestimmt, sobald nur diese Punkte eine solche Lage haben, daß sie sich auf einer Parabelperipherie befinden können: hierzu muß jeder einzeln außerhalb des zwischen den drei andern Punkten enthaltenen Dreieckes gelegen sein.

Beachten wir, daß in der für die Parabel geltenden Bedingungsgleichung $\Delta = 0$ auch der Fall eines Systems zweier parallelen Geraden eingeschlossen ist, so ergibt sich sofort, daß bei besonderer Lage der vier gegebenen Punkte die Parabeln auch in parallele Gerade übergehen können. Nur eine Parabel und ein System paralleler Geraden ist daher möglich, wenn die vier Punkte die Eckpunkte eines Trapezes bilden; keine Parabel läßt sich durch die vier Punkte legen, dafür aber können zwei Systeme paralleler Geraden konstruiert werden, wenn die Punkte mit den Eckpunkten eines Parallelogrammes zusammenfallen.

Als Endresultat der vorhergehenden Erörterungen haben wir die Steigerung zu bemerken, welche sich im Gebiete der Kurven zweiten Grades rücksichtlich der Anzahl ihrer bestimmenden Peripheriepunkte zeigt. Während durch drei Punkte ein Kreis gelegt werden kann, bestimmen vier Punkte zwei Parabeln, fünf Punkte jeden Kegelschnitt überhaupt, also im besonderen Ellipse und Hyperbel.

§ 35. Projektive Strahlbüschel und Punktreihen.

Der im vorigen Abschnitte eingeschlagene Weg läßt sich noch nach einer andern Richtung hin fortsetzen und führt dabei auf eine Reihe fruchtbarer Sätze und geometrischer Konstruktionen für allgemeine Aufgaben über Kurven II. Ordnung.

Um einen Kegelschnitt zu erzeugen, der die fünf Punkte 1,

2, 3, 4, 5 enthält, verbinde man 1 sowie 2 mit 3, 4, 5: die Normalgleichungen der Geraden 13, 14, 23, 24 seien der Reihe nach

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad S_1 = 0, \quad S_2 = 0;$$

die Gleichungen von 15 und 25 ergeben sich dann zu

$$T_1 - mT_2 = 0, \quad S_1 - nS_2 = 0,$$

für ganz bestimmte Werte der Zahlen m und n. Die Gleichung zweiten Grades

1) $$nT_1S_2 - mT_2S_1 = 0$$

befriedigen die Punkte

$T_1 = 0$, $T_2 = 0$, d. i. der gegebene Punkt 1,
$S_1 = 0$, $S_2 = 0$, „ „ „ „ „ 2,
$T_1 = 0$, $S_1 = 0$, „ „ „ „ „ 3,
$T_2 = 0$, $S_2 = 0$, „ „ „ „ „ 4,
$T_1 = mT_2$, $S_1 = nS_2$, „ „ „ „ „ 5.

Folglich ist 1) die Gleichung des durch die gegebenen Punkte eindeutig bestimmten Kegelschnitts.

Es ist leicht, weitere Strahlen der Büschel 1 und 2 anzugeben, die sich in Punkten des Kegelschnitts begegnen. Irgend ein beliebiger Strahl des Büschels 1 hat eine Gleichung von der Form

2) $$T = T_1 - \lambda m T_2 = 0,$$

wobei jedem Strahle dieses Büschels ein ganz bestimmter Wert der Zahl λ zukommt. Setzt man nun die aus 2) folgende Beziehung $T_1 = \lambda m T_2$ in 1) ein, so ergibt sich eine Gleichung, die erfüllt ist, wenn 1) und 2) gelten, die also von den Schnittpunkten von 1) und 2) befriedigt wird. Man erhält

$$mT_2(\lambda nS_2 - S_1) = 0.$$

Hiernach muß für diese Schnittpunkte entweder der erste Faktor, oder der zweite verschwinden. Die erste Voraussetzung führt in Verbindung mit 2) auf den Punkt 1, lehrt also nichts neues. Die zweite ergibt

3) $$S_1 - \lambda n S_2 = 0$$

und lehrt: Je zwei Strahlen der Büschel 1 und 2, die für denselben Wert von λ die Gleichungen

$$T = T_1 - \lambda m T_2 = 0 \quad \text{und} \quad S = S_1 - \lambda n S_2 = 0$$

haben, schneiden sich in einem Punkte des Kegelschnitts

$$n T_1 S^2 - m T_2 S_1 = 0.$$

Wir wollen die Strahlen 2) und 3) als entsprechende Strahlen der Büschel 1 und 2 bezeichnen. Sie stehen mit den Strahlen

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = T_1 - m T_2 = 0$$

und

$$S_1 = 0, \quad S_2 = 0, \quad S_3 = S_1 - n S_2 = 0$$

in einem einfachen geometrischen Zusammenhange: nach dem vorletzten Abschnitte des § 7 ist nämlich

$$\frac{\sin T_1 T}{\sin T T_2} = \lambda m, \quad \frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} = m,$$

$$\frac{\sin S_1 S}{\sin S S_2} = \lambda n, \quad \frac{\sin S_1 S_3}{\sin S_3 S_2} = n,$$

folglich ist

$$\frac{\sin T_1 T}{\sin T T_2} : \frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2} = \frac{\sin S_1 S}{\sin S S_2} : \frac{\sin S_1 S_3}{\sin S_3 S_2} = \lambda.$$

Die Zahl

$$\frac{\sin T_1 T}{\sin T T_2} : \frac{\sin T_1 T_3}{\sin T_3 T_2}$$

bezeichnet man als das Doppelverhältnis der vier Strahlen $T_1 T_2 T_3 T$. Wir können daher sagen: Wenn die Strahlen T und S sich in einem Punkte des Kegelschnitts treffen, so haben sie mit den Grundstrahlen $T_1 T_2 T_3$ bez. $S_1 S_2 S_3$ das gleiche Doppelverhältnis; und umgekehrt: Je zwei Strahlen der Büschel 1 und 2, die mit den Grundstrahlen $T_1 T_2 T_3$ bez. $S_1 S_2 S_3$ dasselbe Doppelverhältnis haben, schneiden sich in einem Punkte des Kegelschnitts.

Wenn zwei veränderliche Strahlen T und S der beiden Büschel $T_1 T_2 T_3$ und $S_1 S_2 S_3$ einander so zugeordnet werden, daß sie mit den Grundstrahlen dasselbe Doppelverhältnis haben, so wird dadurch eine eindeutige Beziehung der Strahlen der beiden Büschel hergestellt, die man als projektive Verwandtschaft bezeichnet. Unter Benutzung dieses Begriffs ergeben sich sofort die wertvollen Sätze: Der Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiven Büschel ist ein Kegelschnitt; und um-

gekehrt: **Die Punkte jedes Kegelschnitts werden mit irgend zwei Punkten des Kegelschnitts durch entsprechende Strahlen zweier projektiven Büschel verbunden.**

Die Aufgabe: Einen Kegelschnitt durch fünf gegebene Punkte zu legen, ist hiermit auf die andere zurückgeführt: Bei zwei projektiven Strahlbüscheln ($T_1 T_2 T_3$ und $S_1 S_2 S_3$) zu jedem Strahle T des einen Büschels den entsprechenden des andern zu zeichnen.

Die Auflösung dieser Aufgabe, die wir kurz als die Ergänzung zweier projektiven Büschel bezeichnen wollen, gelingt leicht, wenn man zunächst zwei projektive Büschel in geeignet vereinfachter Lage in Betracht zieht.

Bei den Büscheln $T_1 T_2 T_3 T$ und $S_1 S_2 S_3 S$ entsprechen offenbar die Strahlen T_1, T_2, T_3 der Reihe nach den Strahlen S_1, S_2, S_3; diese drei Paare gehen nämlich aus den allgemeinen Gleichungen zweier entsprechenden Strahlen 2) und 3) hervor, wenn man der Zahl λ der Reihe nach die besonderen Werte 0, ∞, 1 erteilt.

Nimmt man nun an, zwei Büschel hätten die besondere Lage, daß T_1 und S_1 dieselbe Gerade sind (alsdann müßte also der Punkt 3 mit den Punkten 1 und 2 auf einer Geraden liegen), so kann man in der Kegelschnittsgleichung

$$n T_1 S_2 - m T_2 S_1 = 0$$

die lineare Funktion S_1 durch T_1 ersetzen; die Gleichung der Kurve geht dann über in

$$T_1 (n S_2 - m T_2) = 0,$$

und wird erfüllt, sobald für sich

$$T_1 = 0 \quad \text{oder} \quad n S_2 - m T_2 = 0.$$

Dies lehrt: **Wenn bei zwei projektiven Büscheln der Strahl, der die beiden Büschelträger** (d. i. die Punkte 1 und 2) **verbindet, sich selbst entspricht, so zerfällt der durch die Büschel erzeugte Kegelschnitt in zwei Gerade, deren eine die Verbindungslinie der Träger ist.**

Zwei so gelegene projektive Büschel nennt man **perspektiv** (bez. in **perspektiver Lage**): daher gilt: **Wenn zwei projektive Büschel perspektiv liegen, so schneiden sich je zwei entsprechende Strahlen in Punkten einer Geraden.**

Umgekehrt: **Wenn die entsprechenden Strahlen zweier Büschel sich in Punkten einer Geraden schneiden, so sind die Büschel projektiv.**

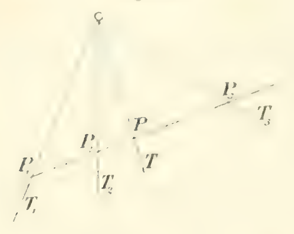


Fig. 48.

Man kann diesen Satz leicht indirekt beweisen; wir ziehen aber folgenden Beweis vor.

Wenn man das Strahlbüschel $T_1 T_2 T_3 T$ (Fig. 48) durch eine beliebige Gerade schneidet, die die Strahlen der Reihe nach in den Punkten $P_1 P_2 P_3 P$ trifft, so teilen, wie man mit Hilfe von § 5, 12 leicht erkennt, P_3 und P die Strecke $P_1 P_2$ in den Verhältnissen

$$a_2 : a_1 = m T_{21} : T_{12}$$
$$b_2 : b_1 = \lambda m T_{21} : T_{12}.$$

Das Doppelverhältnis dieser vier Punkte ist daher

$$\frac{b_2}{b_1} : \frac{a_2}{a_1} = \lambda.$$

Ebensogroß ist das Doppelverhältnis der vier gegebenen Strahlen. Daher hat man: **Ein Strahlbüschel und ein geradliniger Querschnitt sind projektiv; d. h. irgend vier Strahlen des Büschels haben dasselbe Doppelverhältnis, wie die auf ihnen liegenden Punkte des Querschnitts.**

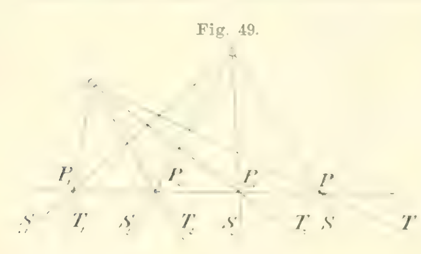


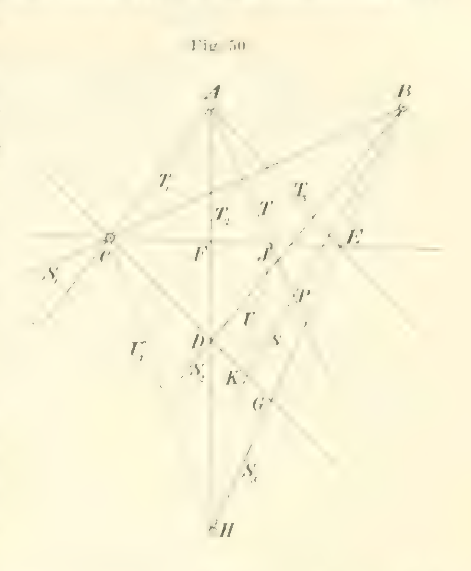
Fig. 49.

Wenn nun $T_1 T_2 T_3 T$ und $S_1 S_2 S_3 S$ einen gemeinsamen geradlinigen Querschnitt $P_1 P_2 P_3 P$ haben (Fig. 49), so haben beide das Doppelverhältnis dieses Querschnitts, sind daher projektiv.

Um nun die Büschel $T_1 T_2 T_3$ und $S_1 S_2 S_3$ (Fig. 50) projektiv zu ergänzen, legen wir von einem Schnittpunkte entsprechender Strahlen, z. B. von C aus zwei geradlinige Querschnitte durch beide Büschel. Um die Figur nicht unnötig zu überladen, wollen wir hierzu CE und CD nehmen. Das Büschel $T_1 T_2 T_3$ erzeugt auf CE den Querschnitt CFE, das andere $S_1 S_2 S_3$ erzeugt auf CD den Querschnitt CDG. Den Punkt H, der die je zwei entsprechende

Punkte DF und EF dieser Querschnitte verbindenden Strahlen T_2 und S_3 gemein haben, nehmen wir zum Träger eines Hilfsbüschels U_1. U_2 (= T_2), U_3 (= S_3). Bestimmen wir zu einem beliebigen Strahle U dieses Büschels die Querschnitte J und K, so sind $AJ = T$ und $BK = S$ zwei entsprechende Strahlen. Denn die Büschel $T_1 T_2 T_3 T$ und $S_1 S_2 S_3 S$ haben offenbar dasselbe Doppelverhältnis wie $U_1 U_2 U_3 U$.

Fig. 50



Man übersieht sofort, wie man durch Vermittelung des Büschels H zu jedem Strahle des Büschels A den entsprechenden des B finden kann und umgekehrt.

Der Schnittpunkt P der entsprechenden Strahlen AJ und BK ist ein Punkt des durch die fünf Punkte $ABCDE$ bestimmten Kegelschnitts, der vollständig erzeugt wird, wenn ein Strahl um A eine vollständige Drehung beschreibt, und zu jeder seiner Lagen der entsprechende Strahl des projektiven Büschels B bestimmt wird.

Hiermit ist die Aufgabe gelöst: Einen Kegelschnitt zu zeichnen, von dem fünf Punkte gegeben sind.

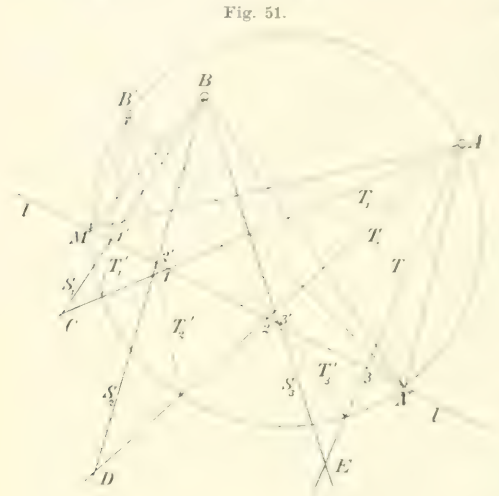
Hieran schließt sich zunächst folgende wichtige Aufgabe: Aus fünf gegebenen Punkten eines Kegelschnitts die beiden Punkte zu konstruieren, in denen er von einer beliebigen Geraden geschnitten wird. Wir ergänzen wieder die Büschel $T_1 T_2 T_3 \ldots$ und $S_1 S_2 S_3 \ldots$ (Fig. 51) und bemerken die Punkte 1, 2, 3 ... 1′ 2′ 3′ ... in denen sie von l durchsetzt werden. Erzeugt man den Punkt B' so, daß die Winkel $1'B'2'$ und $1'B'3'$ der Reihe nach den Winkeln $1A2$ und $1A3$ gleichen, und ergänzt die Büschel A und B' so, daß entsprechende Strahlen T und T' mit T_1 bez. T_1' gleiche Winkel bilden, so sind die Büschel A und B' kongruent, mithin auch projektiv. Dreht man das Büschel B' um den Winkel TT', sodaß T' mit T gleichgerichtet

wird, so erhalten wegen der Kongruenz auch alle andern Paare entsprechender Strahlen die gleiche Richtung; hieraus folgt sofort die Gleichheit der Winkel

$$T_1 T_1' = T_2 T_2' = T_3 T_3' = T T' = \cdots.$$

Dies ergibt: **Zwei kongruente Büschel von gleichem Drehungssinne erzeugen einen Kreis als Ort der Schnittpunkte entsprechender Strahlen.**

Fig. 51.



Die Büschel B' und B ergänzen wir in der Weise, daß entsprechende Strahlen sich auf l schneiden; sie sind dann projektiv in perspektiver Lage. Die Strahlen von A und B, die demselben Strahle B' entsprechen, entsprechen sich bei der projektiven Verwandtschaft von A und B, da B' mit diesen beiden Büscheln projektiv ist.

Die Punkte M und N, in denen l den von den Büscheln A und B' erzeugten Kreis trifft, geben mit A, B' und B verbunden entsprechende Strahlen dieser drei Büschel, gehören also dem von A und B erzeugten Kegelschnitte an, sind daher seine gesuchten Schnittpunkte mit l.

Den Strahl, der von B nach A geht, kann man als Strahl des Büschels B ansehen, der unendlich nahe bei A vorübergeht; ihm muß daher der Strahl des Büschels A entsprechen, der A mit dem unendlich nahe benachbarten Punkte des Kegelschnitts verbindet; dieser berührt den Kegelschnitt in A. Hierdurch ist die Aufgabe erledigt: **In einem gegebenen Punkte eines Kegelschnitts eine Tangente desselben zu ziehen.**

Wenn sechs Punkte auf demselben Kegelschnitte liegen sollen, so muß zwischen ihnen ein gewisser geometrischer Zusammenhang bestehen, den man in verschiedenen Formen ausdrücken kann. Wir haben z. B. soeben den sechsten Punkt als den Schnitt zweier

entsprechenden Strahlen in zwei projektiven Büscheln kennen gelernt, deren Verwandtschaft durch die fünf andern Punkte festgelegt war: so wertvoll nun auch diese Ausdrucksweise ist, so darf man doch daran bemängeln, daß die sechs Punkte hier nicht gleichmäßig auftreten, indem die beiden Büschelträger doch eine andere Rolle spielen, als die übrigen vier Punkte. Wir werden jetzt ein anderes Kennzeichen für sechs Punkte eines Kegelschnitts entwickeln, bei dem alle sechs Punkte ganz gleichmäßig beteiligt sind, und das lange bekannt war, bevor der Begriff der projektiven Verwandtschaft auftrat. Es ist von vornherein sicher, daß es möglich sein muß, eines dieser Kennzeichen aus dem andern abzuleiten; doch werden wir uns damit nicht befassen.

Wir wollen die sechs Punkte mit den Nummern 1 2 3 4 5 6 und die Gerade zweier Punkte i und k einfach mit ik bezeichnen, ihre Gleichung sei $T_{ik} = 0$. Man kann m und n immer so wählen, daß

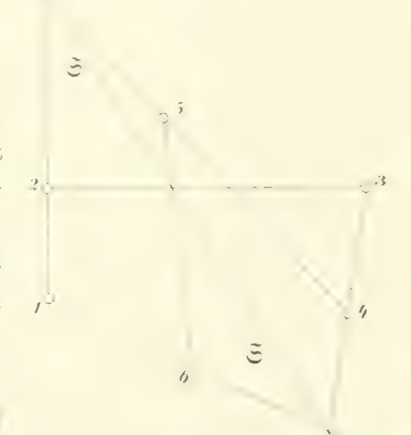
$$mT_{12} - T_{14} = 0$$

und

$$nT_{25} - T_{45} = 0$$

die Gleichungen der Geraden 16 und 56 sind. Unser Kegelschnitt hat dann bekanntlich die Gleichung (vgl. Nr. 1)

$$4)\quad mT_{12}T_{45} - nT_{14}T_{25} = 0.$$



Für eine bestimmte Wahl von a hat 23 die Gleichung

$$5)\quad mT_{12} - aT_{25} = 0.$$

Setzt man $mT_{12} = aT_{25}$ in 4) ein, so erhält man

$$6)\quad nT_{14} = aT_{45};$$

diese Gleichung erfüllt also der Punkt 3, der 4) und 5) außer 2 noch gemeinsam ist. Da nun 6) einem Strahle des Büschels 4 angehört, so folgt, daß 6) die Gleichung von 34 ist. Wir haben also die Gleichungen

$$7)\quad \begin{aligned} T_{16} &= mT_{12} - T_{14} = 0, & T_{56} &= nT_{25} - T_{45} = 0, \\ T_{34} &= nT_{14} - aT_{45} = 0, & T_{23} &= mT_{12} - aT_{25} = 0. \end{aligned}$$

Bildet man hieraus die neuen Gleichungen

$$8)\qquad nT_{16} + T_{34} \equiv mnT_{12} - aT_{45} = 0,$$

$$9)\qquad aT_{56} + nT_{23} \equiv mnT_{12} - aT_{45} = 0,$$

so sieht man aus den rechten Seiten, daß diese beiden Geraden identisch sind; aus den Formen

$$10)\qquad \mathfrak{S} \equiv nT_{16} + T_{34} \equiv aT_{56} + nT_{23} \equiv mnT_{12} - aT_{45} = 0$$

erkennt man, daß die Gerade $\mathfrak{S} = 0$ die drei Punkte

$$T_{12} = T_{45} = 0, \quad T_{23} = T_{56} = 0, \quad T_{34} = T_{16} = 0$$

enthält. Daher hat man den Satz: *Die Gegenseiten des einem Kegelschnitte eingeschriebenen Sechsecks schneiden sich in drei Punkten einer Geraden* (Pascals Satz); und umgekehrt: *Wenn die Gegenseiten eines Sechsecks sich in Punkten einer Geraden schneiden, so ist das Sechseck einem Kegelschnitte eingeschrieben.*

Man kann die sechs Punkte dabei ganz beliebig anordnen; zu jeder Ordnung, die nicht blos eine cyklische Vertauschung einer früheren ist, gehört eine andere Gerade $\mathfrak{S}$; die Beziehungen zwischen diesen zahlreichen Geraden können rein geometrisch, oder auch auf Grund der Gleichungen 10) analytisch entwickelt werden; doch würde die weitere Verfolgung dieses Gedankens hier zu weit führen.

Wenn fünf Punkte 1 2 3 4 5 gegeben sind, so hat man die Gegenseiten 12 und 45, und damit einen Punkt der Geraden $\mathfrak{S}$; nimmt man die Richtung 16 beliebig an, so kennt man auch den Schnitt 16, 34, daher die Gerade $\mathfrak{S}$; da nun 56 und 23 sich auch auf $\mathfrak{S}$ schneiden, so muß 56 durch den Schnitt von 23 und $\mathfrak{S}$ gelegt werden; aus 16 und 56 ergibt sich 6 als Schnittpunkt dieser Geraden. Dies ist die einfachste Konstruktion des Kegelschnitts aus fünf Punkten.

---

§ 36. Tangenten, Pol und Polare an Kurven zweiter Ordnung.

Wir beantworten zunächst die Frage: *In welchen Verhältnissen wird eine gegebene Strecke P_1P_2 durch einen gegebenen Kegelschnitt*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

geteilt?

Ist P einer der Schnittpunkte und teilt P die Strecke $P_1 P_2$ im Verhältnisse $\lambda_2 : \lambda_1$, so ist bekanntlich

$$x = \frac{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Diese Werte müssen der Kurvengleichung genügen; setzt man sie ein, so ergibt sich

$$1)\quad \begin{cases} (a_{11} x_1^2 + 2 a_{12} x_1 y_1 + 2 a_{13} x_1 + a_{22} y_1^2 + 2 a_{23} y_1 + a_{33}) \cdot \lambda_1^2 \\ + 2\,(a_{11} x_1 x_2 + a_{12}(x_1 y_2 + x_2 y_1) + a_{13}(x_1 + x_2) + a_{22} y_1 y_2 \\ + a_{23}(y_1 + y_2) + a_{33}) \cdot \lambda_1 \lambda_2 \\ + (a_{11} x_2^2 + 2 a_{12} x_2 y_2 + 2 a_{13} x_2 + a_{22} y_2^2 + 2 a_{23} y_2 + a_{33}) \cdot \lambda_2^2 = 0. \end{cases}$$

Wir wollen der Übersichtlichkeit wegen die Bezeichnungen verwenden:

$$2)\quad \begin{cases} F(xy) = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + 2 a_{13} x + a_{22} y^2 + 2 a_{23} y + a_{33}, \\ F_1(xy) = a_{11} x + a_{12} y + a_{13}, \\ F_2(xy) = a_{12} x + a_{22} y + a_{23}, \\ F_3(xy) = a_{13} x + a_{23} y + a_{33}. \end{cases}$$

Die Gleichung 1) erscheint dann in der kürzeren Form

$$3)\quad F(x_1 y_1) \cdot \lambda_1^2 + 2\,\{F_1(x_1 y_1) \cdot x_2 + F_2(x_1 y_1) \cdot y_2 + F_3(x_1 y_1)\} \cdot \lambda_1 \lambda_2 + F(x_2 y_2) \cdot \lambda_2^2 = 0.$$

Hierbei ist noch die Beziehung bemerkenswert

$$4)\quad \begin{cases} F_1(x_1 y_1) \cdot x_2 + F_2(x_1 y_1) \cdot y_2 + F_3(x_1 y_1) \\ \equiv F_1(x_2 y_2) \cdot x_1 + F_2(x_2 y_2) \cdot y_1 + F_3(x_2 y_2), \end{cases}$$

deren Richtigkeit man durch Ausrechnen leicht erkennt.

Nehmen wir zunächst an, der Punkt P_1 sei auf dem Kegelschnitte gelegen, so spricht sich dies algebraisch durch die Gleichung aus

$$F(x_1 y_1) = 0.$$

Die Gleichung 3) geht dadurch über in

$$2\,\{F_1(x_1 y_1)\, x_2 + F_2(x_1 y_1)\, y_2 + F_3(x_1 y_1)\}\, \lambda_1 \lambda_2 + F(x_2 y_2)\, \lambda_2^2 = 0.$$

Sie hat eine Wurzel $\lambda_2 = 0$, und dieser Wert führt auf den Punkt P_1 zurück. Die andere Wurzel folgt aus

$$5)\quad \{F_1(x_1 y_1)\, x_2 + F_2(x_1 y_1)\, y_2 + F_3(x_1 y_1)\} \cdot \lambda_1 + F(x_2 y_2) \cdot \lambda_2 = 0.$$

Soll nun $P_1 P_2$ eine Tangente der Kurve sein, so darf diese Gleichung keinen von P_1 verschiedenen Schnittpunkt ergeben, es muß also P_2 so gewählt werden, daß das Glied mit λ_1 in 5) verschwindet, d. i. es müssen die Koordinaten von P_2 die Gleichung erfüllen

$$6)\quad F_1(x_1 y_1) \cdot x + F_2(x_1 y_1) \cdot y + F_3(x_1 y_1) = 0.$$

Diese Gleichung ist linear, sie stellt also eine Gerade dar; auf ihr liegt, wie vorauszusehen war, der Punkt P_1; denn es ist, wie man durch Ausrechnen sofort sieht,

$$7)\qquad F_1(xy)\cdot x + F_2(xy)\cdot y + F_3(xy) = F(xy),$$

also insbesondere

$$F_1(x_1y_1)\cdot x_1 + F_2(x_1y_1)\cdot y_1 + F_3(x_1y_1) = F(x_1y_1) = 0.$$

Wird irgend ein Punkt dieser Geraden mit P_1 verbunden, so erhält man immer wieder die Gerade selbst; folglich ist

$$8)\qquad F_1(x_1y_1)\cdot x + F_2(x_1y_1)\cdot y + F_3(x_1y_1) = 0$$

die Gleichung des Tangente der Kurve

$$F(xy) = 0$$

im Kurvenpunkte x_1y_1.

Die Tangentengleichung ist im allgemeinen eindeutig bestimmt; denn die Koeffizienten $F_1(x_1y_1)$, $F_2(x_1y_1)$, $F_3(x_1y_1)$ sind im allgemeinen eindeutig bestimmte Zahlen. Nur in dem Falle wird durch die Gleichung 8) nichts über den Punkt xy ausgesagt, wenn sämtliche drei Koeffizienten verschwinden, also wenn P_1 auf der Kurve so gewählt werden kann, daß

$$9)\qquad \begin{cases} F_1(x_1y_1) = a_{11}x_1 + a_{12}y_1 + a_{13} = 0, \\ F_2(x_1y_1) = a_{12}x_1 + a_{22}y_1 + a_{23} = 0, \\ F_3(x_1y_1) = a_{13}x_1 + a_{23}y_1 + a_{33} = 0. \end{cases}$$

Diese drei Bedingungungen sind ausreichend. Denn aus 7) folgt, daß sie die Gleichung $F(x_1y_1) = 0$ zur Folge haben. Wenn es also einen Punkt gibt, der den Gleichungen 9) genügt, so liegt er auf dem Kegelschnitte.

Die Gleichungen 9) stimmen mit § 31, 3) und 5) überein, nur daß dort u, v statt x, y steht; hieraus folgt, daß der Verein 9) nur bestehen kann, wenn $D = 0$ ist, wenn also die Gleichung $F(xy) = 0$ nicht eine eigentliche Kurve zweiter Ordnung, sondern ein Geradenpaar darstellt; der Punkt, für welchen alsdann die Tangente unbestimmt bleibt, ist der Schnittpunkt der beiden Geraden. —

Es liegt nahe zu fragen, welche geometrische Bedeutung der Geraden

$$F_1(x_1y_1)\cdot x + F_2(x_1y_1)\cdot y + F_3(x_1y_1) = 0$$

zukommt, wenn man die Voraussetzung fallen läßt, daß P_1 auf der Kurve liegen soll, und unter P_1 einen ganz beliebigen Punkt der Ebene versteht. Wir gehen hierzu besser auf die Gleichung 3) zurück. Unter der Voraussetzung (vgl. auch 4)

$$10) \qquad \begin{aligned} F_1(x_1 y_1) \cdot x_2 + F_2(x_1 y_1) \cdot y_2 + F_3(x_1 y_1) \\ = F_1(x_2 y_2) \cdot x_1 + F_2(x_2 y_2) \cdot y_1 + F_3(x_2 y_2) = 0 \end{aligned}$$

vereinfacht sich die Gleichung 3) zu

$$F(x_1 y_1) \cdot \lambda_1^2 + F(x_2 y_2) \cdot \lambda_2^2 = 0.$$

Diese Gleichung ist für das Teilverhältnis $\lambda_2 : \lambda_1$ rein quadratisch, liefert also zwei Kurvenpunkte, die mit $P_1 P_2$ in Harmonie sind. Unter der Bedingung 10) sind also die Punkte $P_1 P_2$ mit den Schnittpunkten, in denen der Kegelschnitt von $P_1 P_2$ getroffen wird, in Harmonie. Zwei solche Punkte bezeichnet man als in Harmonie mit dem Kegelschnitte; wir können daher 10) als die Bedingungsgleichung für die Harmonie der Punkte $P_1 P_2$ mit dem Kegelschnitte $F(xy) = 0$ bezeichnen.

Fragen wir nach den Punkten P, die einem bestimmten Punkte P_1 für den Kegelschnitt harmonisch zugeordnet sind, so ist die algebraische Bedingung dafür

$$11) \qquad F_1(x_1 y_1) \cdot x + F_2(x_1 y_1) \cdot y + F_3(x_1 y_1) = 0.$$

Dies ist die Gleichung einer im allgemeinen eindeutig bestimmten Geraden. Der Ort aller Punkte, die einem bestimmten Punkte für einen Kegelschnitt harmonisch zugeordnet sind, ist also die Gerade 11). Sie wird die Polare von P_1 genannt. Aus ihrem Begriffe, wie auch aus der Identität 4) folgt: Liegt P_2 auf der Polaren von P_1, so liegt umgekehrt auch P_1 auf der Polaren von P_2.

Die Achsenabschnitte der Polaren sind, wie die Gleichung 11) lehrt,

$$a = -\frac{F_3(x_1 y_1)}{F_1(x_1 y_1)}, \quad b = -\frac{F_3(x_1 y_1)}{F_2(x_1 y_1)}.$$

Sie werden unendlich groß, wenn der Punkt P_1 die Gleichungen erfüllt

$$F_1(xy) = 0, \quad F_2(xy) = 0,$$

die nach § 31, 3) den Mittelpunkt des Kegelschnitts bestimmen.

Wir erhalten somit: Die Polare des Mittelpunkts ist unendlich fern; oder: Dem Mittelpunkte sind lauter unendlich ferne Punkte harmonisch zugeordnet.

Sind $QRMN$ zwei harmonische Paare, so ist nach dem Begriffe der Harmonie

$$\frac{QM}{MR} = -\frac{QN}{NR}.$$

Ist N unendlich fern, so haben QN und NR ungleiche Richtungen und ihr Verhältnis ist -1; folglich ist alsdann

$$\frac{QM}{MR} = +1, \quad QM = MR.$$

Wir finden so die schon bekannte Tatsache wieder: Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts halbiert alle ihn enthaltenden Sehnen. Zufolge der Beziehung 4) kann man die Gleichung der Polaren des Punktes P_1 auch so anordnen:

$$12) \qquad F_1(xy) \cdot x_1 + F_2(xy) \cdot y_1 + F_3(xy) = 0.$$

Hieraus erkennt man die geometrische Bedeutung der linearen Funktionen $F_1(xy)$, $F_2(xy)$ und $F_3(xy)$. Setzt man nämlich $x_1 = y_1 = 0$, so ergibt sich aus 12) die Gleichung $F_3(xy) = 0$. Setzt man $y_1 = 0$, so erhält man zunächst

$$F_1(xy) \cdot x_1 + F_3(xy) = 0, \quad \text{oder} \quad F_1(xy) + \frac{1}{x_1} \cdot F_3(xy) = 0;$$

setzt man hier $x_1 = \infty$, so verbleibt $F_1(xy) = 0$.

Macht man endlich die Voraussetzung $x_1 = 0$, so erhält man

$$F_2(xy) \cdot y_1 + F_3(xy) = 0, \quad \text{oder} \quad F_2(xy) + \frac{1}{y_1} \cdot F_3(xy) = 0;$$

fügt man hierzu noch die Voraussetzung $y_1 = \infty$, so ergibt sich $F_2(xy) = 0$.

Hieraus folgt: Die Gleichungen

$$13) \qquad F_1(xy) = 0, \quad F_2(xy) = 0, \quad F_3(xy) = 0$$

stellen der Reihe nach die Polaren der auf der Abscissenachse und der Ordinatenachse liegenden unendlich fernen Punkte und die Polare des Nullpunktes dar.

Die Polaren zweier beliebigen Punkte P_1 und P_2 sind

$$T_1 = F_1(xy) \cdot x_1 + F_2(xy) \cdot y_1 + F_3(xy) = 0$$

und

$$T_2 = F_1(xy) \cdot x_2 + F_2(xy) \cdot y_2 + F_3(xy) = 0.$$

Jeder Punkt P_3 der Geraden $P_1 P_2$ hat Koordinaten von der Form

$$x_3 = \frac{\mu x_1 + \nu x_2}{\mu + \nu}, \quad y_3 = \frac{\mu y_1 + \nu y_2}{\mu + \nu}.$$

Die Polare von P_3 hat daher die Gleichung

$$T_3 = F_1(xy) \cdot \frac{\mu x_1 + \nu x_2}{\mu + \nu} + F_2(xy) \cdot \frac{\mu y_1 + \nu y_2}{\mu + \nu} + F_3(xy) = 0.$$

Multipliziert man mit $\mu + \nu$, so erhält man

$$T_3 = \mu T_1 + \nu T_2 = 0.$$

Hieraus folgt: Bewegt sich ein Punkt entlang einer Geraden, so dreht sich seine Polare um einen Punkt. Dieser Punkt ist für jeden Punkt der Geraden mit dem Kegelschnitte in Harmonie, er hat sie also zur Polaren. Jede Gerade ist daher die Polare eines im allgemeinen eindeutig bestimmten Punktes. Man erhält diesen Punkt, den man den Pol der Geraden nennt, als Schnittpunkt der Polaren zweier beliebigen Punkte der Geraden.

Wir wollen noch die Punkte beachten, in denen die Polare eines Punktes P_1 den Kegelschnitt trifft. Ist P_2 ein solcher, so hat man neben der Gleichung für harmonische Punkte

$$F_1(x_1 y_1) \cdot x_2 + F_2(x_1 y_1) \cdot y_2 + F_3(x_1 y_1) = 0$$

noch die Voraussetzung

$$F(x_2 y_2) = 0$$

zu beachten. Zufolge beider vereinfacht sich die Gleichung 3) zu

$$F(x_1 y_1) \cdot \lambda_1^2 = 0.$$

Sie liefert zwei Wurzeln $\lambda_1 = 0$, also zwei Punkte des Kegelschnitts, die mit P_2 zusammenfallen. Hieraus folgt: Die Punkte, in denen die Polare eines Punktes P_1 den Kegelschnitt trifft, sind die Berührungspunkte der von P_1 an den Kegelschnitt gelegten Tangenten.

Die Polare eines Brennpunktes ist, wie wir bereits in § 14, S. 93 gefunden haben, die dem Brennpunkte zugehörige Leitlinie. Legt man das Koordinatensystem wie in § 13, Fig. 23, so ist die Gleichung des Kegelschnitts

14) $$(1 - \varepsilon^2) \cdot x^2 - 2 \varepsilon d x + y^2 = 0.$$

Ein Punkt P_1 der dem Brennpunkte F zugehörigen Leitlinie CC hat die Koordinaten

$$x_1 = -\frac{d}{1+\varepsilon}, \quad y_1;$$

für diese Werte ist

$$F_1(x_1 y_1) = -(1-\varepsilon^2)\frac{d}{1+\varepsilon} - \varepsilon d = -d,$$

daher die Gleichung seiner Polaren

$$-d \cdot x + y_1 y + \frac{\varepsilon d^2}{1+\varepsilon} = 0.$$

Diese Gerade hat die Richtungskonstante

$$A = \frac{d}{y_1}.$$

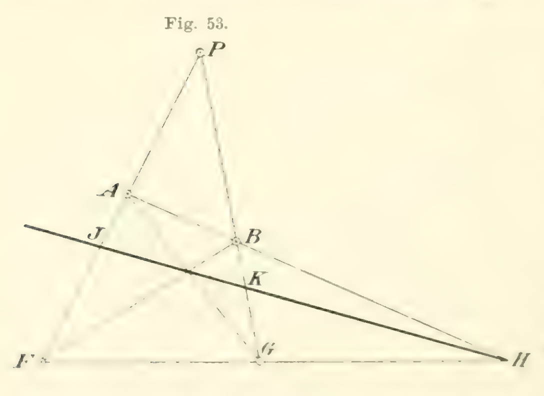
Für die Gerade $P_1 F$ dagegen ergibt sich aus dem Dreiecke $P_1 CF$ die Richtungskonstante

$$A_1 = -\frac{y_1}{d}.$$

Hieraus folgt der Lehrsatz: Die Polare jedes Punktes einer Leitlinie steht auf der Geraden senkrecht, die den Punkt mit dem zu der Leitlinie gehörigen Brennpunkt verbindet.

Wie man leicht sieht, kann man diesem Satze auch folgende Gestalt geben: Das zwischen dem Berührungspunkte und einer Leitlinie enthaltene Stück jeder Kegelschnittstangente wird von dem zugehörigen Brennpunkte aus unter einem rechten Winkel gesehen.

Fig. 53.



Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Auflösung einiger Konstruktionsaufgaben.

I. Von einem Kegelschnitte sind fünf Punkte gegeben A, B, C, D, E: man soll die Polare eines beliebigen Punktes P konstruieren (Fig. 53). Man ergänze den Kegelschnitt durch die projektiven Büschel A und B, bestimme insbesondere den Strahl

des Büschels B, der AP entspricht, sowie den Strahl des Büschels A, der BP entspricht; hierdurch erhält man die zweiten Schnittpunkte F und G der Geraden PA und PB mit dem Kegelschnitte.

Vervollständigt man nun das Vierseit, das die Gegenecken A und G, B und F hat, durch die Ecke H und die Diagonalen AG und BF, so sind die Punktpaare PJ und PK mit dem Kegelschnitte in Harmonie (§ 8, III), folglich ist JK die gesuchte Polare von P.

II. Von einem gegebenen Punkte P aus Tangenten an einen Kegelschnitt zu legen. Man zeichne die Polare von P, ermittle ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte und verbinde diese mit P; die Verbindungslinien sind die verlangten Tangenten.

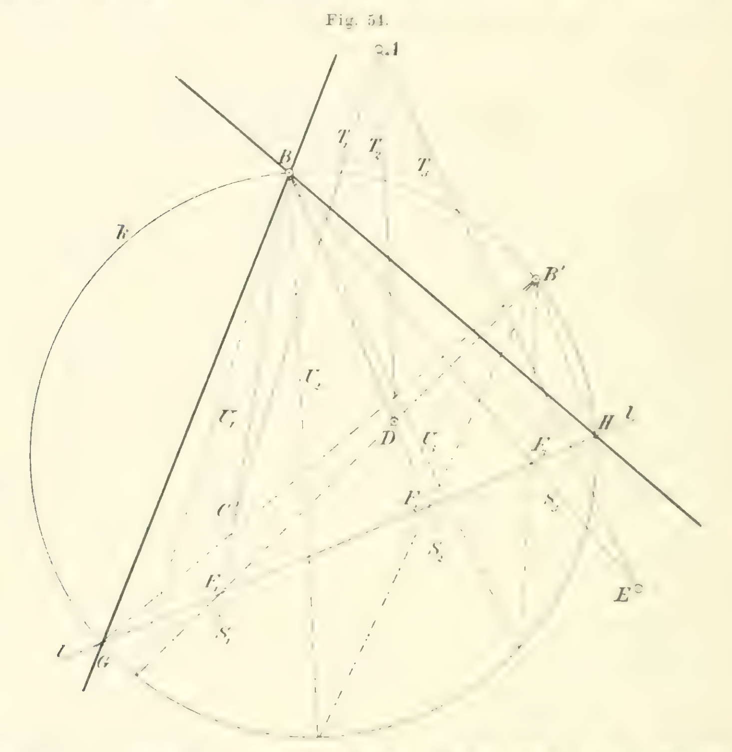
III. Den Mittelpunkt eines Kegelschnitts zu finden. Der Mittelpunkt und jeder unendlich ferne Punkt sind mit dem Kegelschnitte in Harmonie; der Mittelpunkt einer Sehne und ihr unendlich ferner Punkt sind ebenfalls mit der Kurve in Harmonie. Aus beiden Bemerkungen ergibt sich der schon aus früheren Betrachtungen bekannte Satz: Die Mitten paralleler Sehnen eines Kegelschnitts liegen auf einem Durchmesser. Bestimmt man nun auf zwei parallelen Strahlen der Büschel A und B die zweiten Schnittpunkte F und G mit dem Kegelschnitte, und verbindet die Mitten der Sehnen AF und BG, so erhält man einen Durchmesser. Die Wiederholung dieser Konstruktion an einem andern Paare paralleler Strahlen ergibt den Mittelpunkt. Hierauf bestimmt man in bekannter Weise die Schnittpunkte HJ dieses Durchmessers mit dem Kegelschnitte; die Mitte der Strecke HJ ist der Mittelpunkt M der Kurve. Zeichnet man hierzu noch den konjugierten Durchmesser und bestimmt seine Endpunkte, so kann man in dem Falle, daß sie reell sind, der Kegelschnitt also eine Ellipse ist, nach § 22, Fig. 44 die Hauptachsen der Ellipse der Richtung und Länge nach finden.

IV. Die Asymptoten eines Kegelschnitts zu finden. Man ermittelt hierzu die Richtungen, in denen unendlich ferne Punkte der Kurve liegen; die Geraden, die den Mittelpunkt enthalten und diese Richtungen haben, sind die Asymptoten.

Wird der Kegelschnitt durch die projektiven Büschel mit den Trägern A und B erzeugt (Fig. 54), so handelt es sich darum, entsprechende Strahlen der beiden Büschel zu finden, die

parallel sind. Verschieben wir das Büschel A ohne Richtungsänderung in den Träger B, so erhalten wir ein neues Büschel $U_1 U_2 U_3$, und es entsteht die neue Aufgabe, entsprechende Strahlen der projektiven Büschel $S_1 S_2 S_3 \ldots$ und $U_1 U_2 U_3 \ldots$ zu finden, die zusammenfallen. Schneidet man $S_1 S_2 S_3$ durch eine beliebige Gerade l in den Punkten $F_1 F_2 F_3$, und zeichnet B' in bekannter

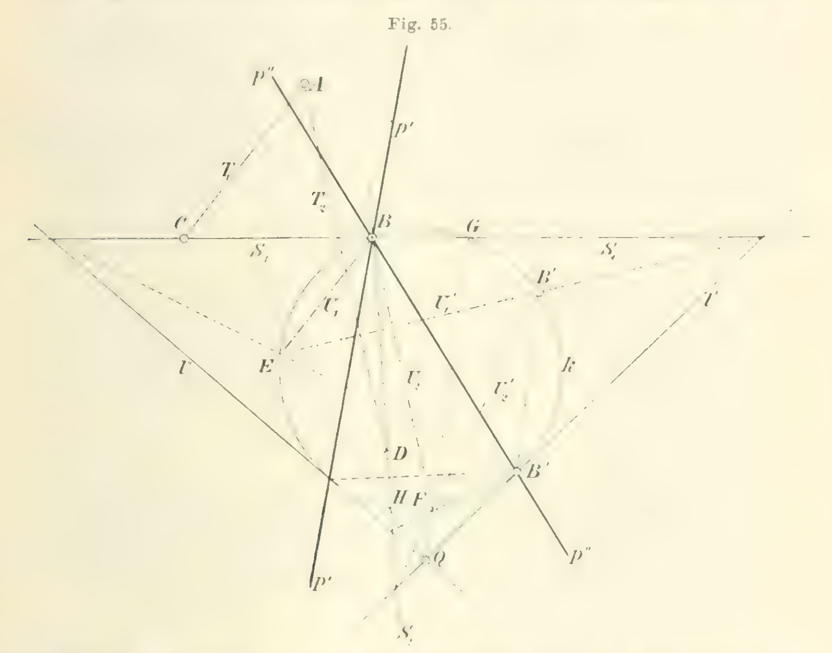
Fig. 54.



Weise so, daß das Büschel $B'F_1$, $B'F_2$, $B'F_3$ dem Büschel $U_1 U_2 U_3$ kongruent ist, so erzeugen B und B' bekanntlich einen Kreis k. Werden die Schnittpunkte G, H dieses Kreises und die Gerade l mit B und B' verbunden, so entsprechen $B'G$ und $B'H$ die Strahlen BG und BH sowohl im Büschel $S_1 S_2 S_3 \ldots$ als im Büschel $U_1 U_2 U_3 \ldots$ Folglich haben die Asymptoten die Richtungen BG und BH. Wie man sieht, ist der Kegelschnitt eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, je nachdem der Kreis k und die Gerade l sich in zwei Punkten schneiden, in einem Punkte berühren, oder verfehlen.

V. **Durch vier gegebene Punkte** $ABCD$ **eine Parabel zu zeichnen** (Fig. 55). Um diese Aufgabe zu lösen, hat man die vorige Konstruktion in der Weise abzuändern, daß der Kreis k die Gerade l berührt. Man ziehe wieder U_1 und U_2 parallel zu T_1 und T_2 und lege dann den Kreis k beliebig durch B. Den Büschelträger B' muß man nun offenbar auf k so legen, daß die durch E und F nach B' gehenden Strahlen U_1' und U_2' auf S_1 und S_2 zwei Punkte bestimmen, die auf einer Tangente von k

Fig. 55.



liegen. Läßt man B' den Kreis durchwandern, so beschreiben die U_1' und die U_2' zwei kongruente Büschel, und ihre Querschnitte auf S_1 und S_2 sind zwei projektive Punktreihen, in denen B sich selbst entspricht. Verbindet man E und F mit einem beliebigen Punkte G des Kreises, so erhält man auf S_1 und S_2 zwei entsprechende Punkte G' und G'' dieser Reihen. Ebenso erhält man aus H die entsprechenden H' und H''*). Die Strahlen des von

*) Um die Figur zu vereinfachen, ist G auf S_1 (und k) und H auf S_2 (und k) angenommen worden, sodaß G und G', FG und $G'G''$, H und H'', EH und $H'H''$ zusammenfallen; zufällig liegt in Fig. 55 der Punkt B'' auf dem Berührungspunkte der Tangente l.

$G'G''$ und $H'H''$ bestimmten Büschels Q ergeben weitere entsprechende Punkte: denn liegen J' und J'' auf einem solchen Strahle, so sind offenbar die Doppelverhältnisse der Punktgruppen $BG'H'J'$ und $BG''H''J''$ gleich, da sie beide dem der Strahlen des Büschels Q gleichen, auf denen B, G', H' und J' liegen. Legt man nun von Q aus Tangenten l' und l'' an k, so hat man B' so zu wählen, daß U_1' und U_2' mit S_1 und S_2 sich auf einer dieser Tangenten schneiden. Man erhält somit zwei oder eine, oder keine Lösung für B', je nachdem Q im Äußern, auf dem Umfange oder im Innern des Kreises liegt. Von B' aus ergänzt man die Büschel $S_1 S_2 \ldots$ und $U_1 U_2 \ldots$ so, daß B' mit $S_1 S_2 \ldots$ zusammen die betreffende Tangente von k, und mit $U_1 U_2 \ldots$ zusammen den Kreis k erzeugt. Die Strahlen, die von B nach den Berührungspunkten der durch Q gezogenen Tangenten gehen, geben die Richtungen p' und p'' der Hauptachsen der beiden Parabeln $ABCD$ an.

§ 37. Kegelschnitte als geometrische Örter.

I. Man soll den Ort der Scheitel aller derjenigen Dreiecke suchen, welche auf einer gegebenen Grundlinie $2m$ stehen, und in welchen die an dieser Grundlinie gelegenen Dreieckswinkel eine konstante Differenz δ besitzen.

Die Grundlinie $2m$ werde zur x-Achse und die Senkrechte in ihrem Halbierungspunkte zur Achse der y in einem rechtwinkligen Koordinatensysteme gewählt. Der auf der Seite der positiven x an der Basis gelegene innere Dreieckswinkel heiße α_1, der andere α_2, und es sei

$$\delta = \alpha_1 - \alpha_2.$$

Bezeichnen nun x und y die Koordinaten des Scheitels für irgend eine Lage des Dreieckes, so sind die Gleichungen der beiden im Scheitel zusammentreffenden Dreiecksseiten

$$y = -(x - m)\tan\alpha_1, \qquad y = (x + m)\tan\alpha_2,$$

und man erhält demnach:

$$\tan\alpha_1 = \frac{y}{m - x}, \qquad \tan\alpha_2 = \frac{y}{m + x}.$$

Mit Rücksicht auf die aus dem Werte von δ hervorgehende Gleichung

$$\tan\delta = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2}$$

folgt

$$\tan\delta = \frac{2xy}{m^2 - x^2 + y^2},$$

und hieraus entsteht für den gesuchten Ort die Gleichung:

1) $$x^2 - 2xy\cot\delta - y^2 = m^2,$$

oder, wenn man für den besonderen Fall $\delta = 0$ das Unendlichwerden des mit dem Faktor $\cot\delta$ behafteten Gliedes vermeiden will:

2) $$x^2\sin\delta + 2xy\cos\delta - y^2\sin\delta = m^2\sin\delta.$$

Hierbei ist $\Delta = -\sin^2\delta - \cos^2\delta = -1$, und $D = m^2\sin\delta$; die Linie ist also eine Hyperbel, die für den besonderen Fall $\delta = 0$ in zwei sich schneidende Gerade — die Koordinatenachsen — übergeht. Das Zentrum fällt mit dem gewählten Koordinatenanfange zusammen.

Da das Koordinatensystem rechtwinklig ist und die Koeffizienten von x^2 und y^2 nur durch das Vorzeichen unterschieden sind, so folgt, daß die Hyperbel gleichseitig sein muß. Bestätigt wird diese Bemerkung, wenn man, um über Lage und Größe der Hyperbelachsen zu entscheiden, durch Drehung der Koordinatenachsen zu einem neuen rechtwinkligen Systeme übergeht. Dabei ist nach § 4 Nr. 1)

$$x\cos\alpha - y\sin\alpha \text{ für } x,$$

$$x\sin\alpha + y\cos\alpha \quad ,, \quad y$$

zu setzen, wenn α den Winkel bedeutet, unter welchem die neue x-Achse gegen die ursprüngliche geneigt ist. Mit Einsetzung dieser Werte entsteht aus 2) nach gehöriger Reduktion:

$$(x^2 - y^2)\sin(2\alpha + \delta) + 2xy\cos(2\alpha + \delta) = m^2\sin\delta.$$

Macht man hierin $2\alpha + \delta = 90^0$ oder $\alpha = 45^0 - \frac{1}{2}\delta$, so bleibt

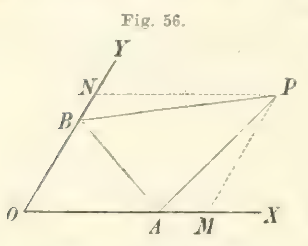
3) $$x^2 - y^2 = m^2\sin\delta,$$

d. i. die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel, deren Mittelpunkt mit dem Halbierungspunkte der gegebenen Dreiecksgrundlinie zusammenfällt und deren Hauptachse unter dem Winkel $45^0 - \frac{1}{2}\delta$ gegen diese Grundlinie geneigt ist. Die Länge der halben Hauptachse beträgt $m\sqrt{\sin\delta}$.

Die hier untersuchte Eigenschaft läßt zwischen der gleichseitigen Hyperbel und dem Kreise insofern eine gewisse Analogie erkennen, als letzterer nach einem bekannten Satze den geometrischen Ort für die Scheitel aller derjenigen Dreiecke bildet, in

welchen bei gegebener Grundlinie die Summe der Winkel an der Grundseite konstant ist.

II. Welche Linie beschreibt ein Eckpunkt eines gegebenen Dreieckes, während jeder der beiden andern Eckpunkte dieses Dreieckes sich auf einem Schenkel eines festen Winkels fortbewegt?



Wir wählen die Schenkel des festen Winkels zu Koordinatenachsen, und es sei PAB (Fig. 56) das gegebene Dreieck in einer der Lagen, welche es infolge der Aufgabe einnehmen kann. P stelle den Eckpunkt dar, welcher die gesuchte Linie beschreiben soll.

Setzen wir $NP = x$, $MP = y$, $BP = a$, $AP = b$, $\angle YBP = \varphi$, $\angle XAP = \psi$ und bezeichnen den Koordinatenwinkel mit ω, so ist nach einem bekannten Dreieckssatze:

$$\sin\varphi = \frac{x\sin\omega}{a}, \quad \sin\psi = \frac{y\sin\omega}{b}.$$

Wird nun der Dreieckswinkel APB mit γ bezeichnet, so findet die Gleichung

$$\varphi + \psi = \omega + \gamma$$

statt, und man erhält hiermit aus

$$\sin^2\varphi\cos^2\psi + \cos^2\varphi\sin^2\psi + 2\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\psi = \sin^2(\varphi + \psi),$$

wenn man linker Hand den sich selbst aufhebenden Ausdruck

$$\sin^2\varphi\sin^2\psi + \sin^2\varphi\sin^2\psi - 2\sin^2\varphi\sin^2\psi$$

addiert:

$$\sin^2\varphi + \sin^2\psi - 2\sin\varphi\sin\psi\cos(\omega + \gamma) = \sin^2(\omega + \gamma).$$

Hieraus entsteht, wenn die obigen Werte von $\sin\varphi$ und $\sin\psi$ eingesetzt werden, für den gesuchten Ort die Gleichung:

$$4) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 2\frac{xy}{ab}\cos(\omega + \gamma) + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left[\frac{\sin(\omega + \gamma)}{\sin\omega}\right]^2.$$

Dieselbe gehört dem zweiten Grade an und gibt, sobald nicht $\omega + \gamma = 180^0$ ist, $\Delta > 0$, $D < 0$; die Linie ist also im allgemeinen eine Ellipse; und zwar fällt, wie man aus der Form der Gleichung leicht erkennt, ihr Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfang, d. i. mit dem Scheitel des gegebenen Winkels zusammen. In dem speziellen

Falle, wenn $\omega + \gamma = 180^0$, bleibt aus Nr. 4):

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab} + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 0,$$

und hieraus folgt:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

d. i. die Gleichung einer durch den Koordinatenanfang gehenden Geraden. Die Ellipse geht demnach in diesem besonderen Falle in eine gerade Linie über.

Beachtet man, daß in Fig. 56 für jede Lage von AB der Punkt P zwei Lagen, zu beiden Seiten von AB, einnehmen kann, ohne daß an den Bedingungen der Aufgabe irgend etwas geändert wird, so läßt sich durch eine der vorhergehenden ganz ähnliche Entwicklung noch ein zweiter geometrischer Ort von P ermitteln. Man findet wieder eine Ellipse, deren Gleichung:

$$5)\qquad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + 2\frac{xy}{ab}\cos(\omega - \gamma) + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \left\{\frac{\sin(\omega - \gamma)}{\sin\omega}\right\}^2$$

lautet.

Kommt an die Stelle des gegebenen Dreiecks eine Gerade, sodaß der beschreibende Punkt P in die Seite AB selbst fällt, so geht in den Gleichungen 4) und 5) der Winkel γ in 180^0 über und die beiden gefundenen Ellipsen werden dabei zu einer einzigen, weil zu $\omega + 180^0$ und $\omega - 180^0$ gleiche trigonometrische Funktionen gehören. Diese Ellipse hat die Gleichung:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2\frac{xy}{ab}\cos\omega + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1.$$

Wird dann noch die Verfügung getroffen, daß der Koordinatenwinkel ein rechter sein soll, so entsteht:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

d. i. die Gleichung einer Ellipse, deren Achsen die Stelle der Koordinatenachsen einnehmen. Wir kommen hierdurch zu der in Fig. 40, S. 124 enthaltenen Konstruktion der Ellipse zurück, welche als spezieller Fall der jetzt behandelten Aufgabe betrachtet werden kann.

III. Die Seiten AC und BC des gegebenen Dreiecks ABC (Fig. 57) werden von der beweglichen Geraden MN in den Punkten M und N geschnitten; welche Linie beschreibt der auf MN gelegene Punkt P, wenn die Bewegung

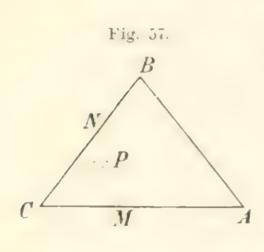
dieser Geraden so vor sich geht, daß immer die Proportion

$$MP : PN = AM : MC = CN : NB$$

Geltung findet?

Wir wählen CA als x-Achse und CB als y-Achse eines Parallelkoordinatensystemes mit dem Anfangspunkte C, und gebrauchen die Bezeichnungen: $CA = a$, $CB = b$, $CM = m$, $CN = n$. Die Koordinaten des beweglichen Punktes P heißen y und x. — Aus der Figur ergibt sich dann sogleich die fortlaufende Proportion:

Fig. 57.



$$MP : PN = (m - x) : x = y : (n - y),$$

welche in Verbindung mit der gegebenen Bedingung zu den Resultaten

$$(m - x) : x = (a - m) : m,$$
$$(n - y) : y = (b - n) : n$$

hinführt. Hieraus folgt:

$$x : m = m : a.$$
$$y : n = n : b.$$

und man erhält demnach:

$$m = (ax)^{\frac{1}{2}}, \qquad n = (by)^{\frac{1}{2}}.$$

Wird hierzu die Gleichung

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

als Bedingung dafür gefügt, daß die Punkte P, M und N in einer geraden Linie liegen sollen, so entsteht für den gesuchten Ort die Gleichung

$$6) \qquad \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Durch zweimalige Quadrierung können hierin die gebrochenen Exponenten entfernt werden. Das erste Mal ergibt sich das Resultat:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 2\left(\frac{xy}{ab}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

und hieraus wieder:

$$\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1\right)^2 = 4\,\frac{xy}{ab}.$$

oder nach Auflösung der Klammer und besserer Ordnung der

Glieder:

$$7)\qquad \frac{x^2}{a^2} - 2\frac{xy}{ab} - 2\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b^2} - 2\frac{y}{b} + 1 = 0.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt zunächst, daß der geometrische Ort des Punktes P eine Linie zweiten Grades ist, welche durch die Punkte A und B geht, und in diesen Punkten von den Koordinatenachsen oder den Dreiecksseiten CA und CB berührt wird, sodaß die dritte Seite AB die dem Punkte C zugehörige Berührungssehne darstellt. Wird nämlich in 7) $y = 0$ gesetzt, so bleibt für die Abscissen der in der x-Achse gelegenen Punkte der untersuchten Linie die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - 2\frac{x}{a} + 1 = 0,$$

welche die beiden gleichen Wurzeln $x = a$ enthält. Hiernach ist CA Tangente im Punkte A. In gleicher Weise führt die Ersetzung $x = 0$ zu dem Resultate, daß CB die Tangente im Punkte B abgibt.

Aus 7) folgt ferner, daß für die fragliche Linie die Größe $\varDelta = 0$ und $D = -\frac{4}{a^2b^2}$, also von Null verschieden ist; die Linie ist daher eine Parabel.

Wir wollen noch untersuchen, ob bei der angegebenen Entstehung dieser Parabel die erzeugende Gerade MN (Fig. 57) außer dem beschreibenden Punkte P noch einen zweiten Punkt mit der Kurve gemein haben kann. Verbinden wir zu diesem Zwecke die Gleichung von MN, nämlich

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

mit der unserer Aufgabe zu Grunde liegenden Bedingung:

$$(a - m) : m = n : (b - n),$$

so läßt sie sich nach Entfernung von n auf die Form

$$(a - m)x + m\frac{ay}{b} - m(a - m) = 0$$

bringen. Für Punkte der Parabel ist aber nach Nr. 6)

$$\frac{ay}{b} = (a^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}})^2;$$

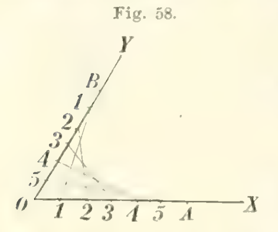
man erhält demnach für die x der gemeinschaftlichen Punkte

beider Linien, wenn aus den beiden letzten Gleichungen y entfernt wird:

$$ax - 2ma^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + m^2 = 0.$$

Da diese Gleichung linker Hand ein vollständiges Quadrat enthält, so besitzt sie zwei gleiche reelle Wurzeln; alle der Aufgabe genügenden Lagen der erzeugenden Geraden geben also Parabeltangenten und der beschreibende Punkt P ist in jedem Falle Berührungspunkt. Hierauf gründet sich die folgende Konstruktion.

Fig. 58.



Soll in den Winkelraum XOY (Fig. 58) ein Parabelbogen gelegt werden, welcher die beiden Schenkel des Winkels in den Punkten A und B berührt, so teile man vorerst sowohl AO als BO in eine gleiche Anzahl gleich großer Teile. Werden dann die auf der Strecke AO gelegenen Teilpunkte von O aus, dagegen die Teilpunkte auf BO von B aus der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4 u. s. f. bezeichnet, so stellen die Geraden, welche die gleichbezeichneten Punkte unter sich verbinden, Tangenten des zu konstruierenden Parabelbogens dar. Man erhält auf diese Weise eine Schar gerader Linien, welche die Kurve umhüllen und sich derselben um so inniger anschmiegen, je größer ihre Anzahl ist. Diese den Parabelbogen einhüllenden Geraden können dazu benutzt werden, den Lauf der Kurve selbst mit beliebiger Annäherung zu bestimmen. Man wird leicht finden, in welcher Weise das angegebene Verfahren fortzusetzen ist, wenn man zu dem Teile der Parabel gelangen will, welcher vom Scheitel des Winkels aus gerechnet sich jenseits der Berührungspunkte A und B befindet.

Eine leicht ersichtliche Abänderung der vorstehenden Konstruktion ergibt sich aus der Bemerkung, daß die aus den zur Fig. 57 gestellten Bedingungen folgende Proportion:

$$(a - m) : m = n : (b - n)$$

zu der Gleichung

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} = 1$$

hinführt, wonach ein mit den Koordinaten m und n konstruierter Punkt, d. i. der vierte Eckpunkt des Parallelogramms, von welchem

CM und CN zwei Nachbarseiten darstellen, auf der Dreiecksseite AB liegen muß. Hiernach kann jeder auf AB gelegene Punkt zur Konstruktion einer der verschiedenen Lagen der die Parabel berührenden beweglichen Geraden MN benutzt werden*).

IV. Sind T_1, T_2, T_3, T_4, ... gegebene lineare Funktionen in Normalform, also

$$8) \qquad T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0, \quad T_4 = 0, \quad \ldots$$

Normalgleichungen gegebener Geraden, so ist jede quadratische Funktion der Größen T_1, T_2, ... eine quadratische Funktion der Koordinaten x, y, stellt also, gleich Null gesetzt, die Gleichung eines Kegelschnitts dar, der mit den Geraden 8) in einem bestimmten geometrischen Zusammenhange steht; dieser wird im allgemeinen um so einfacher sein, je weniger lineare Funktionen bei der Zusammensetzung der Kegelschnittgleichung beteiligt werden. Ist m_k eine beliebige absolute Zahl > 1, so ist $m_k T_k$ nach absolutem Betrage offenbar die Strecke, die von P aus unter einer gegebenen Richtung bis an $T_k = 0$ reicht, und zwar hängt die Richtung nur von m_k, nicht von P ab; wir wollen sie den Schrägabstand PT_k nennen, und dabei immer als selbstverständlich voraussetzen, daß im Verlaufe einer Untersuchung für T_k die Richtung der Schrägabstände aller Punkte P unveränderlich ist.

Die Gleichung

$$9) \qquad n T_1 T_2 - a^2 = 0,$$

worin a eine gegebene Strecke bezeichnet, lehrt: Der Ort der Punkte, deren Schrägabstände von zwei einander schneidenden Geraden ein gegebenes Produkt haben, ist ein Kegelschnitt. Man erkennt leicht, daß hier eine Hyperbel mit den Asymptoten $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ vorliegt.

V. Die Gleichung

$$10) \qquad n T_1 - m_2^2 T_2^2 = 0$$

ergibt: Die Punkte, deren Schrägabstand von einer Ge-

*) Wenn der zur Konstruktion verwendete Punkt auf AB in unendliche Ferne rückt, so wird, wie man sich leicht überzeugt, die Gerade MN parallel zu der durch C gehenden Diagonale des die Seiten CA und CB enthaltenden Parallelogramms, und der Punkt P liegt auf einer Geraden dieser Richtung in unendlicher Ferne. Hieraus folgt, daß die Parabelachse zu der durch C gehenden Diagonale parallel ist.

raden T_1 verhältnisgleich dem Quadrate des Schrägabstands von einer andern Geraden T_2 ist, liegen auf einem Kegelschnitte. Die Gerade $T_1 = 0$ schneidet die Kurve in Punkten, die sich aus $T_2^2 = 0$ ergeben, daher wird die Kurve im Punkte $T_1 = T_2 = 0$ von $T_1 = 0$ berührt. Die Gerade $T_2 = 0$ hat mit der Kurve nur den auf $T_1 = 0$ gelegenen Punkt gemein; für jede andere Gerade des Punkts $T_1 T_2$ hat man $a T_1 = T_2$, also bestimmen sich ihre Schnittpunkte mit dem Kegelschnitte aus

$$T_1 (n - a^2 m_2^2 T_1) = 0;$$

daher fällt einer auf $T_1 = 0$ (und $T_2 = 0$), und der andre wird nur dann unendlich, wenn $a = 0$ ist. Hieran erkennt man die Parabel. In 10) ist

$$a_{11} = - m_2^2 \cos^2 \alpha_2, \quad a_{12} = - m_2^2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2, \quad a_{22} = - m_2^2 \sin^2 \alpha_2$$

und daher

$$\varDelta = \begin{vmatrix} - m_2^2 \cos^2 \alpha_2, & - m_2^2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2 \\ - m_2^2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_2, & - m_2^2 \sin^2 \alpha_2 \end{vmatrix} = 0,$$

in Übereinstimmung mit obiger Schlußweise.

VI. Aus der Gleichung

$$11) \qquad m_1^2 T_1^2 \pm m_2^2 T_2^2 - n^2 = 0$$

ersieht man: Der Ort der Punkte, bei denen die Quadrate der Schrägabstände von zwei gegebenen Geraden eine gegebene Summe oder einen gegebenen Unterschied haben, ist ein Kegelschnitt. Man erkennt leicht in $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ konjugierte Durchmesser.

Diese Sätze sind die einfachsten, die sich aus dem obigen Gesichtspunkte ergeben; man sieht sofort, daß sie nichts wesentlich neues lehren.

VII. Verwenden wir nunmehr drei lineare Funktionen, so ergibt sich zunächst die Gleichung

$$12) \qquad m_1^2 T_1^2 - n T_2 T_3 = 0,$$

oder: Die Punkte, für die das Quadrat des Schrägabstands von einer gegebenen Geraden $T_1 = 0$ verhältnisgleich dem Produkte der Schrägabstände von zwei andern Geraden $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ ist, sind auf einem bestimmten Kegelschnitte enthalten. Die Schnittpunkte dieses Orts mit $T_2 = 0$ oder $T_3 = 0$ erfüllen außerdem die Gleichung $T_1^2 = 0$, fallen also

zusammen; hieran erkennt man, daß $T_2 = 0$ und $T_3 = 0$ den Kegelschnitt berühren, und daß $T_1 = 0$ die Berührungssehne ist.

VIII. Etwas allgemeiner, als 12) ist die Gleichung

$$13) \qquad m_1^2 T_1^2 - n T_2 T_3 - p = 0;$$

hier handelt es sich um Punkte, für die irgend ein Binom, gebildet aus dem Quadrat des Schrägabstands von der Grundseite $T_1 = 0$ eines Dreiecks und dem Produkte der Schrägabstände von den Schenkeln ($T_2 = 0$, $T_3 = 0$), einen gegebenen Wert (p) hat. Der Kegelschnitt 13) trifft die Geraden $T_2 = 0$ und $T_3 = 0$ in Punkten, für die

$$m_1^2 T_1^2 - p = 0,$$

und hierzu gehören die Ränder eines Streifens, dessen Mittellinie $T_1 = 0$ ist; im Falle 12), wo $p = 0$ ist, verschwindet die Breite dieses Streifens.

IX. Die Gleichung

$$14) \qquad m_1^2 T_1^2 + m_2^2 T_2^2 - m_3^2 T_3^2 = 0$$

ergibt die Deutung: Der Ort der Punkte, deren Quadratesumme der Schrägabstände von zwei Seiten $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ dem Quadrate des Schrägabstands von der dritten Seite gleicht, ist ein bestimmter Kegelschnitt. Sieht man $T_1^2 = 0$ als Kegelschnitt an, so ist die Polare des Punktes $\mathfrak{P}$, wie sich aus § 36, 12) sofort ergibt,

$$(\cos\alpha_1 \cdot \mathfrak{x} + \sin\alpha \cdot \mathfrak{y} - d) \cdot T_1 = 0,$$

oder, wenn die Klammer mit $\mathfrak{T}_1$ bezeichnet wird

$$\mathfrak{T}_1 T_1 = 0;$$

ebenso erkennt man ohne weiteres, daß, wenn die Polaren von $\mathfrak{P}$ für die Kegelschnitte

$$F' = 0 \quad \text{und} \quad F'' = 0$$

die Gleichungen

$$S' = 0 \quad \text{und} \quad S'' = 0$$

haben, dem Kegelschnitte

$$aF' + bF'' = 0$$

die Polare zukommt

$$aS' + bS'' = 0.$$

Die Polare von $\mathfrak{P}$ für 14) ist hiernach

$$m_1^2 \mathfrak{T}_1 T_2 + m_2^2 \mathfrak{T}_2 T_2 - m_3^2 \mathfrak{T}_3 T_3 = 0.$$

Die Polare des Punktes $T_1 = 0$, $T_2 = 0$ ist daher die Gerade $T_3 = 0$ u. s. w. Das Dreieck $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ ist also ein Polarendreieck des Kegelschnitts 14), d. i. jede Ecke ist die Polare der Gegenseite.

X. Der Ort der Punkte, für die das harmonische Mittel aus den Schrägabständen von zwei gegebenen Geraden einen gegebenen Wert hat, ist ein Kegelschnitt, der durch den Schnittpunkt der Geraden geht; denn aus

$$\frac{n\,T_1\,T_2}{m_1\,T_1 + m_2\,T_2} = a$$

folgt für xy die quadratische Gleichung

$$15) \qquad n\,T_1\,T_2 - a\,m_1\,T_1 - a\,m_2\,T_2 = 0,$$

die durch $T_1 = T_2 = 0$ erfüllt wird. Man kann setzen

$$m_1\,T_1 + m_2\,T_2 = m_3\,T_3,$$

d. i. die Summe der Schrägabstände eines Punktes von den Geraden $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ ist der Schrägabstand von einer bestimmten Geraden des Büschels $T_1\,T_2$, deren Gleichung lautet $T_3 = 0$; die Gleichung 15) geht hiermit in

$$16) \qquad n\,T_1\,T_2 - a\,T_2 = 0,$$

oder

$$\frac{n\,T_1\,T_2}{m_3\,T_3} = b$$

über und diese lehrt: Der Ort der Punkte, deren Schrägabstände von drei Strahlen eines Büschels eine bestimmte vierte Proportionale haben, ist ein Kegelschnitt, der den Träger des Büschels enthält.

Bedeutet in 16) $T_3 = 0$ eine Gerade, die nicht durch $T_1 = T_2 = 0$ geht, so ändert dies daran nichts, daß der Ort der Punkte ein Kegelschnitt ist; die Kurve enthält die Schnittpunkte von $T_3 = 0$ mit $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$, nicht aber den Schnittpunkt $T_1 = T_2 = 0$. Da jede der Geraden $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ mit dem Kegelschnitte nur einen Punkt im Endlichen gemein hat, nämlich ihren Schnitt mit $T_3 = 0$, so folgt, daß 16) eine Hyperbel ist, deren Asymptoten die Richtungen von $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ haben.

XI. Sind die reziproken Schrägabstände von den Geraden $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ gleich dem reziproken Schrägabstande von $T_3 = 0$, so hat man die Gleichung

17) $$\frac{n_1}{T_1} + \frac{n_2}{T_2} = \frac{n_3}{T_3},$$

oder

18) $$n_1 T_2 T_3 + n_2 T_3 T_1 = n_3 T_2 T_3;$$

der Ort dieser Punkte ist daher ein Kegelschnitt, der dem Dreiecke $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ umgeschrieben ist. Da jedes Sehnendreieck eines Kegelschnitts der Darstellung 18) zu Grunde gelegt werden kann, und das Verhältnis $n_1 : n_2 : n_3$ alsdann durch zwei Punkte dieses Kegelschnitts eindeutig bestimmt ist, so folgt, daß jedem Kegelschnitte in Bezug auf jedes seiner Sehnendreiecke die Eigenschaft 17) zukommt.

XII. Die Gleichung § 35 4)

$$n T_1 S_2 - m T_2 S_1 = 0$$

läßt die Deutung zu: Der Ort der Punkte, für die das Produkt der Schrägabstände von zwei Gegenseiten eines Vierecks dem Produkte der Schrägabstände von den andern Gegenseiten gleicht, ist ein Kegelschnitt, der dem Vierecke umgeschrieben ist.

XIII. Bei der Herstellung einer quadratischen Funktion der Koordinaten können neben den Quadraten und Produkten linearer Funktionen T_1, T_2, ... auch die Abstandsquadrate von Punkten

$$L_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$$

verwendet werden: man erhält dadurch sofort Sätze über geometrische Örter zweiten Grades. Wie schon in § 9, II bemerkt, führt eine lineare Gleichung zwischen beliebig vielen L_i^2 zu nichts neuem, nämlich immer auf einen Kreis; ferner führt die besonders einfache Beziehung

$$L_1^2 - n T_1^2 = 0,$$

wie man sofort erkennt, auf einen Kegelschnitt mit dem Brennpunkte P_1 und der Leitlinie $T_1 = 0$. Die Gleichung

19) $$L_1^2 - n T_1 T_2 = 0$$

lehrt: Die Punkte, deren Abstand von einem festen Punkte dem geometrischen Mittel aus den Abständen von zwei festen Geraden verhältnisgleich ist, sind auf einem bestimmten Kegelschnitte enthalten. Die Polare von 19) für den Punkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ erhält man leicht zu

20) $(\mathfrak{x} - x_1)(x - x_1) + (\mathfrak{y} - y_1)(y - y_1) - n\mathfrak{T}_2 T_1 - n\mathfrak{T}_1 T_2 = 0.$

Die Polare des Punktes $T_1 = T_2 = 0$ ist daher

21) $$(\mathfrak{x} - x_1)(x - x_1) + (\mathfrak{y} - y_1)(y - y_1) = 0.$$

Diese Gerade enthält den Punkt P_1 und ist senkrecht auf der Geraden, die P_1 mit dem Schnittpunkte P_3 von $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ verbindet. Die Polare von P_1 ist

22) $$n\mathfrak{T}_2 T_1 + n\mathfrak{T}_1 T_2 = 0.$$

Sie geht durch P_3 und fällt mit der Polaren von P_1 für den ausartenden Kegelschnitt $T_1 T_2 = 0$ zusammen; $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ sind also harmonisch für 22) und die Gerade $P_1 P_3$. Ist P_2 der Schnittpunkt von 22) und 21), so ist also $P_3 P_2$, d. i. 22), die Polare von P_1, und $P_1 P_2$, d. i. 21), die Polare von P_3, mithin $P_1 P_3$ die Polare von P_1 und $P_1 P_2 P_3$ also ein Polarendreieck, in dem ein rechter Winkel, nämlich bei P_1, vorkommt.

Umgekehrt, wenn in einem Polarendreiecke $P_1 P_2 P_3$ der Winkel bei P_1 recht ist, so gibt es ein bestimmtes Geradenpaar des Trägers P_3 oder P_2, für welche der Abstand jedes Kegelschnittspunktes von P_1 dem geometrischen Mittel der Abstände von den Geraden des bezeichneten Paares verhältnisgleich ist. Sind $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ die Normalgleichungen der Seiten des Polarendreiecks, so kann man die Gleichung des Kegelschnitts K immer in die Form bringen

23) $$S_2^2 + \alpha_3 S_3^2 + \alpha_1 S_1^2 = 0;$$

denn man kann α_3 und α_1 immer eindeutig so bestimmen, daß 23) durch zwei beliebige Punkte N_1 und N_2 des gegebenen Kegelschnitts geht; da nun $S_2 = 0$, $S_3 = 0$, $S_1 = 0$ ein Polarendreieck des gegebenen Kegelschnitts, wie von 23) ist, so enthält 23) noch die Punkte N_1', N_1'' und N_1''', in denen K von $P_1 N_1$, $P_2 N_1$ und $P_3 N_1$ geschnitten wird, wenn P_1, P_2 und P_3 die den Seiten S_1, S_2, S_3 gegenüberliegenden Ecken des Polarendreiecks sind; da nun K und 23) die fünf Punkte N_1, N_1', N_1'', N_1''' und N_2 gemein haben, so ist 23) mit K identisch. Der Gleichung 23) kann man die beiden, die Behauptung beweisenden Formen geben

24) $S_2^2 + S_3^2 + (\sqrt{\alpha_1}\, S_1 + \sqrt{1 - \alpha_3}\, S_3)(\sqrt{\alpha_1}\, S_1 - \sqrt{1 - \alpha_3}\, S_3) = 0,$

25) $\alpha_3(S_2^2 + S_3^2) + (\sqrt{\alpha_1}\, S_1 - \sqrt{\alpha_3 - 1}\cdot S_2)(\sqrt{\alpha_1}\, S_1 + \sqrt{\alpha_3 - 1}\cdot S_2) = 0.$

Das Produkt der in den Klammern stehenden linearen Funktionen ist immer nur in einer der beiden Gleichungen reell, wie man sofort sieht.

Jeder Kegelschnitt hat unendlich viele rechtwinklige Polarendreiecke; ist nämlich a die Polare von A, und zieht man b durch A senkrecht zu a, und bestimmt den Pol B von b, so liegt B auf a; ist C der Schnittpunkt von a und b, so ist daher ABC ein bei C rechtwinkliges Polarendreieck. Wie man aus 23) erkennt, wird α_3 nur dann gleich der positiven Einheit, wenn P_1 ein Brennpunkt ist; alsdann ist $S_1 = 0$ die Leitlinie und $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ fallen mit $S_1 = 0$ zusammen.

XIV. Wir schließen hieran noch einige Sätze über die gleichseitige Hyperbel.

Hat der Kegelschnitt

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

für ein beliebiges anderes rechtwinkliges System die Gleichung

$$b_{11}\xi^2 + 2b_{12}\xi\eta + b_{22}\eta^2 + \cdots = 0,$$

so ist bekanntlich (§ 30, 4)

$$b_{11} + b_{22} = a_{11} + a_{22}.$$

Bei der Gleichung der gleichseitigen Hyperbel in Bezug auf jedes beliebige rechtwinklige Koordinatensystem sind daher die Koeffizienten der Quadrate der Koordinaten entgegengesetzt gleich, und umgekehrt.

Bezogen auf irgend ein rechtwinkliges System kommt also einer gleichseitigen Hyperbel eine Gleichung der Form zu

$$27)\qquad x^2 - y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Diese Gleichung enthält noch vier Konstante; daher folgt: Eine gleichseitige Hyperbel ist durch vier Punkte eindeutig bestimmt.

Durch drei Punkte können unendlich viele gleichseitige Hyperbeln gelegt werden. Legen wir zwei Punkte auf die Abscissenachse, den dritten auf die Ordinatenachse, und schreiben ihnen die Koordinaten $\alpha \,|\, 0$, $\beta \,|\, 0$, $0 \,|\, \gamma$ zu, so ergeben sich durch deren Einsetzung in 27) die Bedingungen

$$2a_{13} = -(\alpha + \beta), \qquad a_{33} = \alpha\beta.$$

$$-\gamma^2 + 2a_{23}\gamma - a_{33} = 0, \quad \text{also} \quad 2a_{13} = \gamma - \frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

Setzt man dies in 27) ein, so erhält man

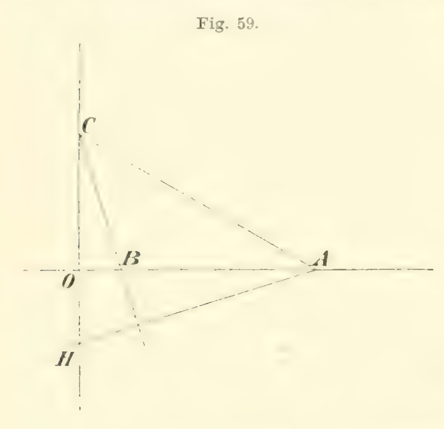
$$28) \quad x^2 - y^2 + 2a_{12}xy - (\alpha + \beta)x + \left(\gamma - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)y - \alpha\beta = 0.$$

Die Schnittpunkte dieser Hyperbel mit der Ordinatenachse ergeben sich aus 28), wenn man $x = 0$ setzt; man erhält

$$29) \qquad -y^2 + \left(\gamma - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)y + \alpha\beta = 0$$

und diese Gleichung hat die Wurzeln $y = \gamma$ und $y = -\frac{\alpha\beta}{\gamma}$. Wie aus den ähnlichen Dreiecken OBC und OHA, wobei H der Höhenpunkt von ABC ist, sofort hervorgeht, ist

Fig. 59.



$$OH = -\frac{\alpha\beta}{\gamma}.$$

Daher folgt: **Alle gleichseitigen Hyperbeln, die einem Dreiecke umschrieben sind, enthalten auch den Höhenpunkt dieses Dreiecks**, oder: **Wenn die Gegenseiten eines Vierecks aufeinander senkrecht stehen, so enthalten alle gleichseitigen Hyperbeln, die durch drei Eckpunkte gehen, auch den vierten.**

Der Mittelpunkt von 28) genügt den Gleichungen.

$$30) \quad \begin{aligned} x + a_{12}y - \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) &= 0, \\ a_{12}x - y + \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung für den Ort der Mitten aller dem Dreiecke ABC umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln erhält man hieraus durch Entfernung der unbestimmten Zahl a_{12}: multipliziert man 30) der Reihe nach mit x und y und subtrahiert, so erhält man

$$31) \qquad x^2 + y^2 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x - \frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)y = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises, der den Nullpunkt, d. i. den

Fußpunkt einer Höhe des Dreiecks ABC enthält: der andre Schnittpunkt mit der x-Achse hat die Abscisse $\frac{1}{2}(\alpha + \beta)$, ist also die Mitte von AB; mit der y-Achse, d. i. mit der Höhe CO, hat er außer C noch den Punkt gemein, dessen Ordinate

$$\frac{1}{2}\left(\gamma - \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$$

ist, d. i. die Mitte von CH. Da nun die Seite AB keine bevorvorzugte Lage gegen die gleichseitige Hyperbel hat, so folgt, daß der Kreis 31) folgende neun Punkte enthält: 1. die Fußpunkte der Höhen, 2. die Seitenmitten, 3. die Mitten der vom Höhenpunkte H bis zu den Ecken reichenden Strecken. Dieser Kreis für den Namen „der Kreis der neun Punkte" oder „der Feuerbachsche Kreis". Wir haben somit den Satz: Der Ort der Mitten der gleichseitigen Hyperbeln, die einem Dreiecke umschrieben sind, ist der Feuerbachsche Kreis dieses Dreiecks.

Ist $T_1 = 0$, $T_2 = 0$, $T_3 = 0$ ein Polarendreieck eines Kegelschnitts, so nimmt dessen Gleichung die Form an (§ 37, IX)

32) $$a_1 T_1^2 + a_2 T_2^2 + a_3 T_3^2 = 0;$$

sind T_i Normalformen, so ist

$$a_{11} = a_1 \cos^2\alpha_1 + a_2 \cos^2\alpha_2 + a_3 \cos^2\alpha_3,$$
$$a_{22} = a_1 \sin^2\alpha_1 + a_2 \sin^2\alpha_2 + a_3 \sin^2\alpha_3,$$

also

$$a_{11} + a_{22} = a_1 + a_2 + a_3.$$

Man hat daher den bemerkenswerten Satz: Für jedes Polarendreieck eines Kegelschnitts ist die Summe der Koeffizienten $a_1 + a_2 + a_3$ in Gleichung 32) dieselbe. Insbesondere gilt: Bei einer gleichseitigen Hyperbel ist $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ und umgekehrt.

In der Gleichung

$$T_1^2 - m T_2 T_3 = 0,$$

worin T_1, T_2, T_3 wieder als Normalformen vorausgesetzt werden, hat man

$$a_{11} = \cos^2\alpha_1 - m \cos\alpha_2 \cos\alpha_3,$$
$$a_{22} = \sin^2\alpha_1 - m \sin\alpha_2 \sin\alpha_3,$$

also

$$a_{11} + a_{22} = 1 - m \cos(\alpha_2 - \alpha_3).$$

Für die gleichseitige Hyperbel ist also

$$m = \frac{1}{\cos\delta},$$

wenn mit δ der Winkel $T_2 T_3 = \alpha_2 - \alpha_3$ bezeichnet wird. Die gleichseitige Hyperbel, die die Schenkel des Dreiecks $T_1 T_2 T_3$ in den Enden der Grundseite T_1 berührt, hat also die Gleichung

$$\cos\delta \cdot T_1^2 - T_2 T_3 = 0,$$

wobei δ den Winkel an der Spitze bezeichnet.

Neuntes Kapitel.

Linien höherer Ordnung.

Allgemeine Bemerkungen.

§ 38. Bestimmung einer Kurve n^{ter} Ordnung durch gegebene Punkte.

Die Ermittelung der Eigenschaften solcher Linien, bei denen die Koordinaten der einzelnen Punkte für ein beliebiges Parallelkoordinatensystem durch eine Gleichung dritten, vierten Grades u. s. f. aneinander gebunden sind, wird um so umständlicher und schwieriger, je höher der Grad der Gleichung ist. Es ist gelungen, eine reiche Fülle von allgemeinen Sätzen aufzustellen, die sich insbesondere auf die Tangenten höherer Kurven, auf ihre Durchschnittspunkte mit Geraden (entsprechend den Polarensätzen bei den Kegelschnitten), sowie mit Kurven niederen und gleichen Grades beziehen. Die Einteilung der Linien eines bestimmten höheren Grades nach gewissen Typen (sowie die Kegelschnitte in Parabeln, Ellipsen und Hyperbeln zerfallen) und die Untersuchung der besonderen Eigenschaften der einzelnen Typen begegnet großen Schwierigkeiten wegen des Formenreichtums bei Kurven höheren Grades; derselbe ist bereits bei den Kurven dritten Grades unvergleichlich größer, als bei den Kegelschnitten, zufolge der größeren Anzahl der in einer kubischen Gleichung enthaltenen Konstanten.

Wir werden uns darauf beschränken, einige Richtungen anzugeben, in denen die Untersuchung von Kurven höherer Grade vor sich gehen kann, und davon Anwendung auf geeignete Beispiele zu machen*).

*) Tiefer in die Erkenntnis der bis jetzt entdeckten Eigenschaften der Kurven höherer Grade einzuführen, liegt außerhalb der für dieses Buch gezogenen Grenzen; wir verweisen die Leser, welche weiter vordringen wollen, auf die Werke: Durège, Die ebenen Kurven dritter Ordnung, Leipzig 1871; Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven, 2. Aufl., Leipzig, 1882; Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Leipzig 1876; Baltzer, Analytische Geometrie, Leipzig 1882; Loria, Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven. Deutsch von Schütte, Leipzig 1902.

Die allgemeine Form einer Gleichung n^{ten} Grades zwischen den Koordinaten x, y eines Punktes läßt eine doppelte Anordnung zu, je nachdem man diejenigen Glieder zusammenfaßt, welche dieselbe Potenz einer Veränderlichen, z. B. der Abscisse x, enthalten, oder die Glieder gleicher Dimensionen kombiniert. Im ersteren Falle hat man

$$1)\quad \begin{cases} Ax^n + (A_1 y + B)x^{n-1} + (A_2 y^2 + B_1 y + C)x^{n-2} \\ \quad + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad + (A_{n-1} y^{n-1} + B_{n-2} y^{n-2} + \cdots + L_1 y + M)x \\ \quad + (A_n y^n + B_{n-1} y^{n-1} + \cdots + M_1 y + N) = 0, \end{cases}$$

im andern besitzt die Gleichung die Form:

$$2)\quad \begin{cases} Ax^n + A_1 x^{n-1} y + A_2 x^{n-2} y^2 + \cdots + A_{n-1} x y^{n-1} + A_n y^n \\ \quad + Bx^{n-1} + B_1 x^{n-2} y + \cdots + B_{n-2} x y^{n-2} + B_{n-1} y^{n-1} \\ \quad + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ \quad + (Lx^2 + L_1 xy + L_2 y^2) + (Mx + M_1 y) + N = 0. \end{cases}$$

Beliebig viele der Koeffizienten A, B, C u. s. f. können hierin gleich Null sein, nur selbstverständlich nicht gleichzeitig alle diejenigen, welche der höchsten Dimension angehören.

Die Anzahl der Koeffizienten kann man in 1) oder 2) abzählen; in 1) enthalten die mit den fallenden Potenzen von x multiplizierten Klammern, einschließlich des Gliedes Ax^n, Koeffizienten in der Anzahl $1, 2, 3, 4, \ldots n, n+1$; die Summe dieser Zahlen ist bekanntlich

$$\tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) = \tfrac{1}{2}n(n+3) + 1.$$

Da man nun einen Koeffizienten immer durch Division entfernen kann, so enthält die Gleichung nur $\frac{1}{2}n(n+3)$ wesentliche Konstante.

Soll eine Kurve n^{ten} Grades einen gegebenen Punkt $x_1 y_1$ enthalten, so müssen diese Koordinaten der Gleichung 1) genügen; hierdurch ergibt sich eine lineare Bedingungsgleichung der unbekannten Koeffizienten. Durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ solcher Gleichungen sind die in gleicher Anzahl vorhandenen wesentlichen Konstanten bestimmt; daher folgt: Eine Kurve n^{ter} Ordnung ist durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte bestimmt. Setzt man hier für n der Reihe nach 1 und 2, so erhält man als Zahl der zur Bestimmung nötigen und ausreichenden Punkte $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 4 = 2$, bez. $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 5 = 5$, in Übereinstimmung mit der bekannten Tatsache, daß eine Gerade durch 2,

ein Kegelschnitt durch 5 Punkte bestimmt ist. Für $n = 3$ ergibt sich $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 = 9$, für $n = 4$ dagegen $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7 = 14$; somit folgt: Eine Kurve 3. Ordnung ist durch 9 Punkte, eine Kurve 4. Ordnung durch 14 Punkte bestimmt. Die Koordinaten der Punkte, die zwei Kurven n^{ter} Ordnung gemein haben, bestimmen sich aus zwei verschiedenen Gleichungen der Form 1). Zu ihrer Ermittelung schreiben wir die Gleichung 1) abkürzungsweise in der Form

$$3)\quad F_0 x^n + F_1 x^{n-1} + F_2 x^{n-2} + \cdots + F_{n-1} x + F_n = 0,$$

wobei F_k eine Funktion der Ordinate y vom Grade k bezeichnet. Die Gleichung einer der beiden Linien sei 3), und die der andern

$$4)\quad G_0 x^n + G_1 x^{n-1} + G_2 x^{n-2} + \cdots + G_{n-1} x + G_n = 0.$$

Wie man x aus 3) und 4) entfernen kann, wollen wir für $n = 2$ und $n = 3$ zeigen. Für $n = 2$ fügt man zu 3) und 4) die beiden Gleichungen, die aus 3) und 4) durch Multiplikation mit x hervorgehen, und erhält so den zu erfüllenden Verein

$$5)\quad \begin{aligned} F_0 x^3 + F_1 x^2 + F_2 x \phantom{{}+F_2} &= 0, \\ F_0 x^2 + F_1 x + F_2 &= 0, \\ G_0 x^3 + G_1 x^2 + G_2 x \phantom{{}+G_2} &= 0, \\ G_0 x^2 + G_1 x + G_2 &= 0. \end{aligned}$$

Diesen Verein kann man als linear für die Größen x^3, x^2, x^1, x^0 ansehen; sein Bestehen wird durch das Verschwinden der Determinante bedingt

$$6)\quad \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \\ & F_0 & F_1 & F_2 \\ G_0 & G_1 & G_2 & \\ & G_0 & G_1 & G_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Man überzeugt sich leicht, daß jedes Glied die Form $F_i F_k G_l G_m$ hat, worin $i\ k\ l\ m$ 0, 1 oder 2 bedeuten und $i + k + l + m$ in allen Gliedern 4 beträgt. Da nun aber F_i und G_i in Bezug auf y im allgemeinen vom Grade i sind, so folgt, daß 5) vom 4. Grade ist. Hat man die vier Wurzeln y_1, y_2, y_3, y_4 von 6) berechnet, so kann man die zugehörigen Werte von x finden, indem man die ersten drei Gleichungen des Vereins 5) zusammenstellt. Aus ihnen schließt man auf das Verschwinden der Determinante

$$7)\qquad \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 x \\ & F_0 & F_1 x + F_2 \\ G_0 & G_1 & G_2 x \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist linear für x, und liefert zu jeder Wurzel von 6) eindeutig den zugehörigen Wert von x. Hieraus folgt: Zwei Kurven 2. Ordnung haben im allgemeinen vier Punkte gemein.

Ähnlich verfährt man, wenn 3) und 4) dritten Grades sind. Aus dem Vereine

$$8)\qquad \begin{aligned} F_0 x^5 + F_1 x^4 + F_2 x^3 + F_3 x^2 &= 0, \\ F_0 x^4 + F_1 x^3 + F_2 x^2 + F_3 x &= 0, \\ F_0 x^3 + F_1 x^2 + F_2 x + F_3 &= 0, \\ G_0 x^5 + G_1 x^4 + G_2 x^3 + G_3 x^2 &= 0, \\ G_0 x^4 + G_1 x^3 + G_2 x^2 + G_3 &= 0, \\ G_0 x^3 + G_1 x^2 + G_2 x + G_3 &= 0 \end{aligned}$$

folgt

$$9)\qquad \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & & \\ & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & \\ & & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 \\ G_0 & G_1 & G_2 & G_3 & & \\ & G_0 & G_1 & G_2 & G_3 & \\ & & G_0 & G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Jedes Glied der linken Seite ist für y vom 9. Grade. Die zugehörigen x folgen eindeutig aus

$$10)\qquad \begin{vmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & F_3 & \\ & F_0 & F_1 & F_2 & F_3 x \\ & & F_0 & F_1 & F_2 x + F_3 \\ G_0 & G_1 & G_2 & G_3 & \\ & G_0 & G_1 & G_2 & G_3 x \end{vmatrix} = 0.$$

Dies lehrt: Zwei Kurven 3. Ordnung schneiden sich in 9 Punkten.

Da nun, wie wir auf S. 233 gezeigt haben, eine Kurve 3. Ordnung durch 9 gegebene Punkte eindeutig bestimmt ist, so können die Punkte eines Schnittpunktvereins von zwei Kurven 3. Ordnung nicht voneinander unabhängig sein. Legt man durch acht beliebige Punkte 1, . . . 8 zwei verschiedene Kurven 3. Ordnung,

indem man etwa zu den acht Punkten nacheinander noch zwei ganz beliebige neunte Punkte P und Q fügt und sind $F = 0$ und $G = 0$ die Gleichungen der durch 1, 2, ⋯ 8, P, bez. 1, 2, ⋯ 8, Q bestimmten Kurven 3. Ordnung, so muß auch jeden der unendlich vielen Kurven 3. Ordnung, die man aus $F = 0$ und $G = 0$ für wechselnde Werte der Zahl λ durch die Zusammensetzung ableitet

11) $$F + \lambda G = 0,$$

die gegebenen 8 Punkte enthalten; außerdem enthält jede der Kurven 11) den bestimmten 9. Punkt, den die Kurven $F = 0$ und $G = 0$ außer 1, 2, ⋯ 8 noch gemein haben. Damit enthüllt sich eine Eigenschaft der Kurven 3. Ordnung, zu der es in der Lehre von den Kegelschnitten kein Seitenstück gibt: Haben zwei oder mehr Kurven 3. Ordnung gegebene 8 Punkte gemein, so enthalten sie alle auch noch einen 9. Punkt, der durch die 8 gegebenen Punkte mit bestimmt ist. Man kann diesem wichtigen Satz auch folgende Fassung geben: Wenn eine Kurve 3. Ordnung 8 Schnittpunkte zweier andrer Kurven derselben Ordnung enthält, so muß sie auch den neunten enthalten.

Wir begnügen uns damit, nur eine Anwendung dieses fruchtbaren Satzes zu geben. Die erste, dritte und fünfte, sowie die zweite, vierte und sechste Seite eines Sechsecks 1 2 3 4 5 6 bilden zwei (zerfallende) Kurven 3. Ordnung. Ihre neun Schnittpunkte bestehen aus den Ecken des Sechsecks und den drei Schnittpunkten der Gegenseiten 12 und 45, 23 und 56, 34 und 61 des Sechsecks. Ist nun das Sechseck einem Kegelschnitte K eingeschrieben, so bildet K mit der Geraden T der Punkte 12, 45 und 23, 56 eine Kurve 3. Ordnung, die 8 von den genannten 9 Punkten enthält; folglich muß der Punkt 34, 61 auf T liegen. Wenn also ein Sechseck einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, so schneiden sich die Gegenseiten auf einer Geraden. Dies dürfte der einfachste Beweis des Pascalschen Satzes sein, der seine wahren Wurzeln zeigt.

§ 39. **Gleichungen einiger besonderen Linien dritter und vierter Ordnung.**

I. Die Parabelevolute (Neilsche Parabel).

Der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte einer gegebenen Kurve wird die Evolute dieser Linie genannt; die ur-

sprüngliche Kurve selbst führt in ihrer Beziehung zur Evolute den Namen **Evolvente**. Was im allgemeinen den Weg betrifft, auf welchem die Gleichung einer Evolute gefunden werden kann, so müssen zuvor die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes xy als Funktionen des zugehörigen Punktes $x_1 y_1$ der Evolvente gegeben sein. Man hat in diesem Falle zwei Gleichungen von der Form

$$x = \varphi(x_1, y_1), \quad y = \psi(x_1, y_1).$$

Wird hierzu die Bedingung gefügt, daß der Punkt $x_1 y_1$ auf der Evolvente liegen soll, deren Gleichnng

$$F(x_1 y_1) = 0$$

sein mag, so liegen drei Gleichungen vor, aus denen die Koordinaten des besonderen Kurvenpunktes $x_1 y_1$ zu entfernen sind. Es bleibt dann eine Gleichung zwischen x und y übrig, die sich, unabhängig von der Lage des Punktes $x_1 y_1$, auf alle Krümmungsmittelpunkte der gegebenen Kurve bezieht; dieselbe ist also die Gleichung der gesuchten Evolute. — Zur Anwendung dieser Theorie stellen wir uns die Aufgabe, die Gleichung und aus dieser die Gestalt der **Parabelevolute** zu ermitteln.

Wird die Achse der Parabel zur x-Achse und ihre Scheiteltangente zur y-Achse genommen, so gelten nach § 18 Nr. 9) und 10) für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes die Gleichungen:

$$x = p + 3x_1, \quad y = -\frac{y_1^3}{p^2},$$

wobei der Punkt $x_1 y_1$ als Parabelpunkt noch der Gleichung

$$y_1^2 = 2px_1$$

zu genügen hat. Berechnet man aus den beiden ersten Gleichungen x_1 und y_1, und setzt diese Werte in die letzte Gleichung, so entsteht:

$$\left(\sqrt[3]{-p^2 y}\right)^2 = 2p\left(\frac{x-p}{3}\right),$$

und hieraus nach gehöriger Umgestaltung:

1) $$y^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{(x-p)^3}{p}.$$

Die Parabelevolute ist hiernach eine Linie dritten Grades. Was ihre Gestalt betrifft, so folgt aus dem Umstande, daß in der

Gleichung 1) die Ordinate nur in der zweiten Potenz vorkommt, die Symmetrie der Kurve in Beziehung auf die Parabelachse. Dabei wird y für $x < p$ imaginär, für $x = p$ ist $y = 0$, für $x > p$ dagegen besitzt y immer zwei reelle Werte, deren absolute Größe gleichzeitig mit x ins Unendliche wächst. Einfacher noch als aus Nr. 1) lassen sich die Eigenschaften unserer Kurve übersehen, wenn man durch parallele Verschiebung der y-Achse den Koordinatenanfang in den der x-Achse angehörenden Peripheriepunkt verlegt, welcher $x = p$ und $y = 0$ zu Koordinaten hat*). Bezeichnet man die neuen Koordinaten mit x' und y', so ist

$$x = x' + p, \quad y = y'$$

zu setzen. Wird nun außerdem noch die Abkürzung

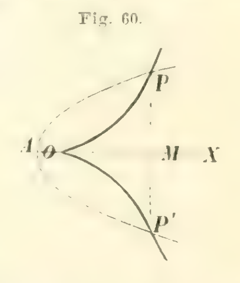
2) $$k = \tfrac{27}{8}\,p$$

eingeführt, so geht die Gleichung der Evolute in

3) $$ky'^2 = x'^3$$

über. Diese Form der Gleichung zeigt sofort, daß von $x' = 0$ an die absoluten Werte von y' gleichzeitig mit den x', aber in einem stärkeren Verhältnisse als diese wachsen. Die Evolute erhält hierdurch die Gestalt der Kurve POP' (Fig. 60), für welche PAP' die zugehörige Parabel darstellt. Da in letzterer, im Gegensatze zu ihrer Evolute, die Ordinaten in einem weniger starken Verhältnisse als die Abscissen wachsen, so schneiden sich die beiden Linien zu beiden Seiten der x-Achse in zwei Punkten P und P'. Für diese Punkte gelten die Gleichungen beider Kurven, also, wenn wir zu den auf den Koordinatenanfang A bezogenen Gleichungen zurückkehren,

Fig. 60.



$$y^2 = 2px, \quad y^2 = \frac{8}{27}\,\frac{(x-p)^3}{p},$$

woraus für die x gemeinschaftlicher Punkte die Gleichung

$$(x-p)^3 = \tfrac{27}{4}\,p^2 x$$

hervorgeht. Diese Gleichung hat zwar lauter reelle Wurzeln, nämlich

$$x_1 = 4p, \quad x_2 = x_3 = -\tfrac{1}{2}p;$$

---

*) Es ist dies der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel der Parabel.

die beiden letzten sind aber in unserem Falle deshalb unzulässig, weil zu ihnen in beiden Kurven imaginäre y gehören. Es bleibt daher nur $AM = 4p = 4AO$.

II. Die Cissoide (Fußpunktkurve der Parabel).

Wenn man von einem festen Punkte aus auf die Tangenten einer gegebenen Kurve Senkrechte fällt, also diesen Punkt auf die Tangenten projiziert, so liegen die Projektionen oder die Fußpunkte der gefällten Perpendikel auf einer neuen Linie, der man den Namen Fußpunktkurve gibt. Der aus dem Mittelpunkte der Ellipse mit einem der großen Halbachse gleichen Radius beschriebene Kreis und der Hauptkreis der Hyperbel, die für die Parabel in die geradlinige Scheiteltangente übergehen, sind Beispiele solcher Fußpunktlinien für die in einer Linie zweiten Grades aus einem Brennpunkte gefällten Perpendikel. Wir wollen zu diesen bereits bekannten Beispielen einige andere auf die Linien zweiten Grades bezügliche hinzufügen.

Was im allgemeinen die Methode betrifft, mittels welcher die Gleichung einer Fußpunktkurve gewonnen wird, so ist sie mit der bei Aufsuchung der Evolutengleichung angewendeten in Übereinstimmung. Die Gleichungen der Tangente im Kurvenpunkte $x_1 y_1$ und der vom festen Punkte darauf gefällten Senkrechten bilden für den Fußpunkt xy zwei Gleichungen, welche mit der für x_1 und y_1 geltenden Kurvengleichung zu verbinden sind, um nach Entfernung von x_1 und y_1 eine nur noch x und y enthaltende, auf sämtliche Fußpunkte bezügliche Gleichung übrig zu lassen. Dieselbe ist die Gleichung der gesuchten Fußpunktkurve.

Die gegebene Kurve sei eine Parabel, aus deren Scheitel die Senkrechten gefällt werden.

Wählen wir wieder die Achse der Parabel und ihre Scheiteltangente zur x- und y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so lautet nach § 16 Nr. 11) die Gleichung der Tangente im Parabelpunkte $x_1 y_1$:

$$y_1 y = p(x - x_1),$$

und für die aus dem Scheitel darauf gefällte Senkrechte ergibt sich nach Nr. 6) im § 6:

$$y = -\frac{y_1}{p} x.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$y_1 = -\frac{py}{x}, \quad x_1 = -\frac{x^2+y^2}{x}.$$

Werden diese Werte in die Parabelgleichung

$$y_1^2 = 2px_1$$

eingesetzt, so erhält man bei einfacher Umgestaltung die für alle Fußpunkte geltende Gleichung:

4) $$py^2 = -2x(x^2+y^2).$$

Die gesuchte Kurve ist hiernach eine Linie dritten Grades, welche eine zur x-Achse symmetrische Form besitzt; dabei liegt sie vollständig auf der Seite der negativen x. Mit Rücksicht auf die letzte Eigenschaft ist es bequemer, wenn beide Seiten der x-Achse so unter sich vertauscht werden, daß die positiven x auf diejenige Seite der y-Achse zu liegen kommen, auf welcher sich die Kurve befindet. Dabei geht x in $-x$ über. Wenn wir außerdem noch die Konstante

5) $$f = \frac{p}{2},$$

d. i. nach § 14 Nr. 1) den Abstand des Parabelscheitels vom Brennpunkte oder von der Leitlinie einführen, so verwandelt sich die Gleichung 1) in

6) $$fy^2 = x(x^2+y^2),$$

und hieraus ergibt sich, wenn auf y reduziert wird,

7) $$y^2 = \frac{x^3}{f-x}.$$

Man sieht aus diesem Ausdrucke, daß y nur solange reelle Werte erhält, als x zwischen den Grenzen 0 und f enthalten ist; die Kurve liegt also gänzlich innerhalb des von der Scheiteltangente und der Leitlinie begrenzten Flächenstreifens. Innerhalb dieses Raumes wachsen die y von 0 bis ∞.

Gehen wir mittels der Substitutionen

$$y = r\sin\varphi, \quad x = r\cos\varphi, \quad x^2+y^2 = r^2$$

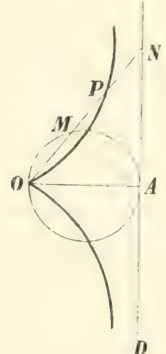
von Nr. 3) zu Polarkoordinaten über, so entsteht die Polargleichung

8) $$r = f\sin\varphi\tan\varphi\,^{*}),$$

*) Hierbei sind ebenso wie in der Polargleichung der Neilschen Parabel zwei aus der Gleichung $r^2 = 0$ hervorgehende Wurzeln abgeworfen worden.

welche zu einer höchst einfachen Konstruktion der in Rede stehenden Kurve hinführt. Wird nämlich in Fig. 61, wo O den Parabelscheitel und DN die Leitlinie darstellt, über dem Durchmesser $OA = f$ ein Kreis gezogen, so ist, wenn $\angle AOP = \varphi$ gesetzt wird,

Fig. 61.



$$AM = f \sin \varphi.$$

folglich, da $\angle MAN = \angle AOP$,

$$MN = AM \tan \varphi = f \sin \varphi \tan \varphi.$$

und hiernach mit Rücksicht auf Nr. 5), wenn P einen Kurvenpunkt darstellt, $MN = OP$, also auch $PN = OM$. Man wird leicht bemerken, wie mit Benutzung dieser Eigenschaft beliebig viele Punkte der Kurve gewonnen werden können.

Die durch die Gleichungen 1), 3), 4) und 5) dargestellte Linie führt den Namen Cissoide.

Soll die Fußpunktkurve der Ellipse für die aus dem Mittelpunkte gefällten Perpendikel gesucht werden, so gelten für den Fußpunkt xy und den zugehörigen Ellipsenpunkt $x_1 y_1$ (vgl. § 21 Nr. 11) die drei Gleichungen:

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1, \quad y = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1} x,$$

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1.$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$\frac{x_1}{a} = \frac{ax}{x^2 + y^2}, \quad \frac{y_1}{b} = \frac{by}{x^2 + y^2}.$$

Setzt man diese Werte in die dritte Gleichung ein, so erhält man für die Fußpunktkurve:

$$9) \qquad \frac{a^2 x^2 + b^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 1,$$

oder nach Reduktion auf den Nenner:

$$10) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2.$$

Der Umstand, daß diese Gleichung nur gerade Potenzen von x und y enthält, wonach sich zu jedem Werte der einen Koordinate gleiche, mit entgegengesetzten Vorzeichen versehene Werte der andern ergeben, zeigt, daß die gesuchte Kurve gegen beide Achsen

symmetrisch liegt, eine Eigenschaft, die auch sofort aus der Entstehung der Linie abgeleitet werden kann. Die Kurve selbst ist eine Linie vierten Grades.

Die Gleichung der **Fußpunktkurve einer Hyperbel** für die aus dem Mittelpunkte gefällten Senkrechten ergibt sich mit Rücksicht auf die im Eingange des § 25 besprochene Beziehung, welche zwischen der Ellipsen- und Hyperbelgleichung stattfindet, wenn man in Nr. 7) b^2 mit $-b^2$ vertauscht. Die Gleichung lautet folglich:

$$11) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2,$$

wonach die Fußpunktkurve wieder dem vierten Grade angehört und gegen beide Achsen symmetrisch gelegen ist.

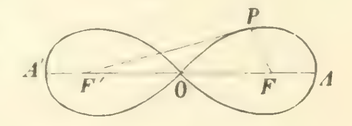
Setzt man eine gleichseitige Hyperbel, also $a = b$ voraus, so vereinfacht sich die Gleichung zu

$$12) \qquad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Die hierdurch dargestellte Kurve führt den Namen Lemniskate (Fig. 62).

Die Lemniskate besitzt die merkwürdige Eigenschaft, daß, wenn man in der Achse AA' zu beiden Seiten des Mittelpunktes zwei feste Punkte F und F' in dem Abstande $OF = OF' = a\sqrt{\frac{1}{2}}$ annimmt, für jeden beliebigen Peripheriepunkt das Produkt $PF \cdot PF'$ der beständigen Größe $\frac{1}{2}a^2$ gleich ist. Aus den Formeln

Fig. 62.



$$PF^2 = (x - a\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2 + y^2,$$

$$PF'^2 = (x + a\sqrt{\tfrac{1}{2}})^2 + y^2$$

folgt nämlich durch Multiplikation nach einfacher Umformung:

$$PF^2 \cdot PF'^2 = (x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) + \tfrac{1}{4}a^4,$$

und hieraus mit Rücksicht auf Nr. 12):

$$PF^2 \cdot PF'^2 = \tfrac{1}{4}a^4,$$

worin die angegebene Eigenschaft ausgedrückt ist. Die Lemniskate bildet hiernach einen besonderen Fall einer Linie, in welcher überhaupt das Produkt $PF \cdot PF'$ eine beliebige konstante Größe q^2 besitzt. Um auch für diesen allgemeineren Fall die Gleichung zu

entwickeln, behalten wir die vorher angewendeten Koordinatenachsen bei und setzen $OF = OF' = e$. Dann ist

$$PF^2 = (x - e)^2 + y^2,$$
$$PF'^2 = (x + e)^2 + y^2,$$

woraus mittels der vorgelegten Bedingung die Gleichung

$$\{(x - e)^2 + y^2\}\{(x + e)^2 + y^2\} = q^4$$

hervorgeht. Aus derselben ergibt sich nach Ausführung der Multiplikation und geänderter Ordnung der Glieder:

$$13) \qquad (x^2 + y^2)^2 - 2e^2(x^2 - y^2) = q^4 - e^4.$$

Die durch diese Gleichung dargestellte Kurve vierten Grades hat den Namen der Cassinischen Linie erhalten*). Sie zeichnet sich durch eine mit der gegenseitigen Größe von e und q mannigfach wechselnde Formverschiedenheit aus.

§ 40. Tangenten, Wendepunkte, Doppelpunkte und Doppelpunktstangenten.

I. Sind $x_1 y_1$ die Koordinaten eines beliebigen Punktes P_1 der Ebene, und zieht man von P_1 aus eine Gerade, die mit der x-Achse den Winkel φ bildet, so sind die Koordinaten xy des Punktes P dieser Geraden, der von P_1 den Abstand r hat,

$$1) \qquad x = x_1 + r\cos\varphi, \qquad y = y_1 + r\sin\varphi.$$

Soll nun P auf der Kurve liegen, deren Gleichung

$$2) \qquad F(xy) = 0$$

ist, so hat man 1) in 2) einzusetzen, und erhält

$$3) \qquad F(x_1 + r\cos\varphi,\ y_1 + r\sin\varphi) = 0.$$

Wir wollen die linke Seite nach steigenden Potenzen von r entwickeln. Das mit keiner Potenz von r behaftete Glied bleibt in dieser Gleichung übrig, wenn man $r = 0$ setzt, es lautet daher $F(x_1 y_1)$; bezeichnen F_1', F_2', F_1'', ... bestimmte Funktionen von $x_1 y_1$, die sich in jedem einzelnen Falle ohne Schwierigkeit herstellen lassen, so ergibt die verlangte Entwicklung

*) Nach dem bekannten Astronomen Dominique Cassini, der diese Linie benutzte, um von ihr eine, übrigens irrtümliche Anwendung auf die Theorie der Mondbewegung zu machen.

$$4)\quad \begin{aligned} F(x_1 y_1) &+ (F_1' \cos\varphi + F_2' \sin\varphi) r \\ &+ (F_1'' \cos^2\varphi + F_2'' \cos\varphi \sin\varphi + F_3'' \sin^2\varphi) r^2 + \cdots \end{aligned}$$

Wir wollen nun P_1 auf $F(xy) = 0$ annehmen. Alsdann verschwindet $F(x_1 y_1)$ und die übrigbleibende Gleichung hat in allen Gliedern den Faktor r, ergibt also, wie vorauszusehen war, die Wurzel $r = 0$. Die übrigen Wurzeln folgen aus der Gleichung

$$5)\quad \begin{aligned} &F_1' \cos\varphi + F_2' \sin\varphi \\ &+ (F_1'' \cos^2\varphi + F_2'' \cos\varphi \sin\varphi + F_3'' \sin^2\varphi) r + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Im allgemeinen sind deren Wurzeln von Null verschieden. Soll 5) von $r = 0$ befriedigt werden, die Gerade also zwei in P_1 fallende Punkte mit der Kurve gemein haben, so muß φ so gewählt werden, daß

$$6)\quad F_1' \cos\varphi + F_2' \sin\varphi = 0.$$

Hieraus folgt

$$\tan\varphi = -\frac{F_1'}{F_2'},$$

und die Gleichung der Geraden

$$y - y_1 = -\frac{F_1'}{F_2'}(x - x_1),$$

oder besser

$$7)\quad F_1'(x - x_1) + F_2'(y - y_1) = 0.$$

Da diese Gerade in P_1 zwei unendlich nahe zusammenfallende Punkte mit der Kurve gemein hat, so berührt sie die Kurve in diesem Punkte: 7) ist also die Gleichung der Tangente der Kurve $F(xy) = 0$ im Punkte $x_1 y_1$.

Die Gleichung der Neilschen Parabel (§ 39, I) können wir in der Form annehmen

$$8)\quad x^3 - qy^2 = 0,$$

wobei die Ordinatenachse durch den auf der Abscissenachse liegenden Punkt der Kurve geht, und q für $\frac{27}{8}p$ gesetzt worden ist. Die Ersetzung 1) ergibt

$$9)\quad \begin{aligned} &x_1^3 - qy_1^2 + (3x_1^2 \cos\varphi - 2qy_1 \sin\varphi) r \\ &+ (3x_1 \cos^2\varphi - q \sin^2\varphi) r^2 + \cos^3\varphi \cdot r^3 = 0. \end{aligned}$$

Die Tangente im Punkte $x_1 y_1$ hat also die Gleichung

$$3x_1^2(x - x_1) - 2qy_1(y - y_1) = 0,$$

oder, in Rücksicht auf 8),

$$10)\qquad 3x_1^2 \cdot x - 2qy_1 \cdot y - x_1^3 = 0.$$

Insbesondere gilt für die Tangente in dem Punkte $3p,\ 2p\sqrt{2}$ der Neilschen Parabel, in dem sie von der zu Grunde liegenden gemeinen Parabel geschnitten wird,

$$96x - 27\sqrt{2} \cdot y - 512p = 0.$$

Ihre Richtung hängt nicht vom Parameter ab, was sich von vornherein erwarten ließ, da alle Parabeln einander ähnlich sind.

Die Gleichung der Cissoide (§ 39, II) schreiben wir

$$x(x^2 + y^2) - fy^2 = 0.$$

Die Ersetzung 1) ergibt

$$(x_1 + r\cos\varphi)(x_1^2 + y_1^2 + 2x_1 r\cos\varphi + 2y_1 r\sin\varphi + r^2)$$
$$- f(y_1^2 + 2y_1\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi) = 0.$$

oder, nach Potenzen von r geordnet,

$$x_1(x_1^2 + y_1^2) - fy_1^2$$
$$11)\quad + \{(3x_1^2 + y_1^2)\cos\varphi + 2y_1(x_1 - f)\sin\varphi\}\, r$$
$$+ \{3x_1\cos^2\varphi + 2y_1\cos\varphi\sin\varphi + (x_1 - f)\sin^2\varphi\}\, r^2 + \cos\varphi \cdot r^3 = 0.$$

Die Gleichung der Tangente im Punkte $x_1 y_1$ der Cissoide ist daher

$$12)\quad (3x_1^2 + y_1^2)(x - x_1) + 2y_1(x_1 - f)(y - y_1) = 0.$$

Für die Lemniskate (§ 39, 12) hat man die Entwicklung

$$(x_1^2 + y_1^2)^2 - a^2(x_1^2 - y_1^2) + 2\{(2x_1^2 + 2y_1^2 - a^2)x_1\cos\varphi$$
$$+ (2x_1^2 + 2y_1^2 + a^2)y_1\sin\varphi\}\, r$$
$$13)\quad + \{(6x_1^2 + 2y_1^2 - a^2)\cos^2\varphi + 8x_1 y_1\cos\varphi\sin\varphi +$$
$$(2x_1^2 + 6y_1^2 + a^2)\sin^2\varphi\}\, r^2$$
$$+ 4(x_1\cos\varphi + y_1\sin\varphi)\, r^3 + r^4 = 0.$$

Die Gleichung der Tangente ist hiernach

$$14)\quad (2x_1^2 + 2y_1^2 - a^2)x_1(x - x_1) + (2x_1^2 + 2y_1^2 + a^2)y_1(y - y_1) = 0.$$

wofür man in Rücksicht auf die Kurvengleichung auch setzen kann

$$15)\quad (2x_1^2 + 2y_1^2 - a^2)x_1 x + (2x_1^2 + 2y_1^2 + a^2)y_1 y - a^2(x_1^2 - y_1^2) = 0$$

Bei der allgemeinen Cassinischen Linie ändert sich an der Form der Tangentengleichung nichts, man hat nur a^2 durch $2c^2$ zu ersetzen.

II. Es kann vorkommen, daß der Winkel φ, der der Gleichung entspringt

16) $$F_1' \cos\varphi + F_2' \sin\varphi = 0,$$

auch die Gleichung befriedigt

17) $$F_1'' \cos^2\varphi + F_2'' \cos\varphi \sin\varphi + F_3'' \sin^2\varphi = 0.$$

Die notwendige und ausreichende Bedingung hierfür ergibt sich, wenn man $\tan\varphi$ aus 16) berechnet und in 17) einsetzt: man erhält für die Koordinaten von P' die Bedingungsgleichung

18) $$F_1'' F_2'^2 - F_2'' F_1' F_2' + F_3'' F_1'^2 = 0.$$

Die Gleichung lehrt, daß P_1 auf einer bestimmten Kurve liegen, also ein Schnittpunkt von $F = 0$ und 18) sein muß. Die Tangente in jedem dieser Punkte hat in $x_1 y_1$ drei unendlich nahe benachbarte Punkte mit der Kurve gemein: man nennt deswegen P_1 **Wendepunkt**, die Tangente in P_1 **Wendetangente**.

Die besondere **kubische Parabel**

19) $$y = (x - 1)(x - 2)(x - 3) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

gibt entwickelt

$$x_1^3 - 6x_1^2 + 11x_1 - 6 - y_1 + [(3x_1^2 - 12x_1 + 11)\cos\varphi - \sin\varphi] \cdot r$$
$$+ (3x_1 - 6)\cos^2\varphi \cdot r^2 + \cos^3\varphi \cdot r^3 = 0.$$

Die Bedingungsgleichung für Wendepunkte beschränkt sich hier auf das erste Glied in 18), lautet daher

$$3x_1 - 6 = 0,$$

woraus $x_1 = 2$ und $y_1 = 0$ folgt; der Punkt $2 \mid 0$ ist daher ein Wendepunkt der kubischen Parabel 19). Die Gleichung der Wendetangente ergibt sich, wenn man in der Tangentengleichung

$$(3x_1^2 - 12x_1 + 11)(x - x_1) - (y - y_1) = 0$$

$x_1 = 2$, $y_1 = 0$ setzt; man erhält

$$x + y - 2 = 0.$$

Die Wendetangente durchschneidet also die Abscissenachse unter 45^0.

III. Wenn es Punkte auf der Linie $F = 0$ gibt, für die die Gleichungen

20) $$F_1' = 0 \quad \text{und} \quad F_2' = 0$$

erfüllt werden, so hat jede Gerade eines solchen Punktes in ihm zwei Punkte mit der Kurve gemein. Im allgemeinen werden mit

den Bedingungen 20) nicht zugleich auch die Bedingungen

21) $$F_1'' = 0, \quad F_2'' = 0, \quad F_3'' = 0$$

erfüllt sein, im allgemeinen trifft also eine solche Gerade die Kurve an dieser Stelle in nicht mehr als zwei Punkten.

Ein Punkt, der den Gleichungen genügt

22) $$F = 0, \quad F_1' = 0, \quad F_2' = 0$$

heißt daher ein Doppelpunkt der Kurve.

Da diese drei Gleichungen nur zwei Unbestimmte x_1, y_1 enthalten, so kann ihnen im allgemeinen nicht genügt werden: im allgemeinen hat also eine Kurve n^{ter} Ordnung keine Doppelpunkte. Um zu erkennen, ob eine Kurve Doppelpunkte hat, muß man aus zweien der Gleichungen 22) x_1 und y_1 berechnen, unter diesen sind diejenigen die Doppelpunkte, die auch der dritten Gleichung genügen.

Die Anzahl der Doppelpunkte, die bei einer Kurve auftreten kann, ist durch ihren Grad in bestimmter Weise beschränkt. Eine Kurve 3. Ordnung kann nicht mehr als einen Doppelpunkt haben. Denn hätte sie zwei, so würde ihre Gerade mit der Kurve vier Punkte gemein haben, was unmöglich ist, sofern die Gerade nicht ein Bestandteil der Kurve ist. Eine Kurve 3. Ordnung mit zwei Doppelpunkten besteht aus einer Geraden und einem Kegelschnitte, bei drei Doppelpunkten zerfällt sie in drei Gerade. Eine Kurve 4. Ordnung hat höchstens drei Doppelpunkte. Denn hätte sie vier, so könnte man durch sie und einen beliebigen andern Punkt der Kurve einen Kegelschnitt legen, und dieser hätte neun Punkte mit der Kurve gemein, da nämlich jeder der Doppelpunkte auch hier für zwei Schnittpunkte zählt. Eine Kurve 4. Ordnung mit vier Doppelpunkten zerfällt also in zwei Kegelschnitte, deren Schnittpunkte die Doppelpunkte sind, und die ihrerseits wieder ausarten können. Die drei Doppelpunkte einer Kurve 4. Ordnung können nicht auf einer Geraden liegen, denn diese Gerade enthielte dann sechs Punkte der Kurve. Wenn also eine Kurve 4. Ordnung drei Punkte einer Geraden zu Doppelpunkten hat, so zerfällt sie in diese Gerade und ein Gebilde 3. Ordnung. Zieht man durch einen Doppelpunkt eine Gerade in einer Richtung, für die der Koeffizient von r^2 in der Entwicklung . . . verschwindet, so hat eine solche Gerade im Doppel-

punkte nicht blos zwei, sondern drei Punkte mit der Kurve gemein, schmiegt sich also enger an die Kurve, wie jede andere Gerade des Doppelpunkts; man bezeichnet sie als Doppelpunktstangente.

Die Neilsche Parabel hat den Nullpunkt zum Doppelpunkte. Setzt man seine Koordinaten in den Koeffizienten von r^2 der Gleichung 9), so erhält man

$$q \sin^2 \varphi = 0,$$

woraus die Doppelwurzel $\varphi = 0$ folgt. Die Kurve hat also einen Doppelpunkt, den man Spitze nennt, weil seine Tangenten zusammenfallen.

Bei der Cissoide hat man für die Koordinaten eines Doppelpunkts die Gleichungen

$$3x^2 + y^2 = 0, \qquad y(x - f) = 0,$$
$$x(x^2 + y^2) - fy^2 = 0.$$

Der ersten genügt nur der Nullpunkt; da er auch die andern befriedigt, so folgt: Die Cissoide hat nur einen Doppelpunkt. Setzt man $0|0$ in den Koeffizienten von r^2 der Gleichung 11), so erhält man wieder

$$\sin^2 \varphi = 0,$$

der Doppelpunkt ist also auch bei der Cissoide eine Spitze.

Bei der Lemniskate hat man die Gleichungen

$$(2x^2 + 2y^2 - a^2)x = 0, \qquad (2x^2 + 2y^2 + a^2)y = 0,$$
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Die erste liefert

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Setzt man dies in die folgende ein, so ergibt sich für $x = 0$ nur $y = 0$, und unter der andern Voraussetzung ebenfalls $y = 0$, wozu dann die erste $x = \frac{1}{2} a \sqrt{2}$ liefert. Der Kurvengleichung genügt die erste Annahme, die letzte dagegen nicht. Die Lemniskate hat also den Nullpunkt zum Doppelpunkte, weitere Doppelpunkte aber hat sie nicht. Setzt man $0|0$ in den Koeffizienten von r^2 in 13), so ergibt sich

$$-a^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi = 0,$$

also

$$\tan \varphi = \pm 1.$$

Die beiden Doppelpunktstangenten der Lemniskate halbieren also die Winkel der Koordinatenachsen.

Wir schließen diese Betrachtungen mit dem Hinweise auf eine Kurve 3. Ordnung mit einem eigentlichen Doppelpunkte. Die Gleichung

$$y^2 = x^3 + ax^2,$$

worin $a > 0$ sein mag, führt zu der Entwicklung

$$y_1^2 - x_1^3 + [2y_1 \sin\varphi - (3x_1^2 - 2ax_1)\cos\varphi]\, r$$
$$+ [\sin^2\varphi - (3x_1 + a)\cos^2\varphi]\, r^2 - \cos^3\varphi \cdot r^3 = 0.$$

Für den Doppelpunkt hat man die Gleichungen

$$y = 0, \qquad 3x^2 - 2ax = 0,$$
$$y^2 = x^3 + ax^2.$$

Die zweite liefert die Wurzeln $x = 0$ und $-\frac{2}{3}a$, von den beiden Punkten $0 \mid 0$ und $-\frac{2}{3}a \mid 0$ liegt aber nur der erste auf der Kurve. Die Tangenten in diesem Doppelpunkte haben die Richtungen

$$\tan\varphi = \pm\sqrt{a}.$$

Sie sind nicht reell, wenn a negativ angenommen wird; in diesem Falle ist der Doppelpunkt ein vereinzelter (isolierter) Punkt der Kurve, dessen Koordinaten zwar der Kurvengleichung genügen, in dessen unmittelbarer Umgebung aber nach keiner Richtung hin Kurvenpunkte liegen. Bei Kurven 2. Ordnung kommen solche vor, die überhaupt nur aus einem vereinzelten Punkte bestehen, wie z. B. der Kegelschnitt

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = 0,$$

dessen Gleichung nur von dem einzigen reellen Punkte befriedigt wird, dessen Koordinaten $x = a$ und $y = b$ sind; ein Punkt und eine Gerade, dargestellt durch die Gleichung dritten Grades

$$[(x - a)^2 - ax_1^2 + (y - b)^2] \cdot (mx - ny + p) = 0$$

ergeben das einfachste Beispiel einer Kurve 3. Ordnung mit einem isolierten Punkte; eine Kurve 4. Ordnung kann sich auf zwei vereinzelte Punkte beschränken.

Zehntes Kapitel.

Transcendente Linien.

§ 41. Die transcendenten Linien im allgemeinen.

Alle bis jetzt untersuchten Linien waren derart, daß sie bei Beziehung auf Parallelkoordinaten durch algebraische rationale Gleichungen zwischen x und y dargestellt wurden. Wenn wir nun bedenken, daß jede Gleichung zwischen zwei veränderlichen Größen, abgesehen von der besonderen Form der darin enthaltenen Funktionen, in geometrischer Auffassung den zusammenhängenden Lauf einer Linie ausdrückt, soweit zu reellen sich stetig ändernden Werten der einen Variabeln eben solche Werte der andern gehören, so bleibt noch für die Untersuchung das unendliche Gebiet solcher, offenbar krummen, Linien übrig, deren Gleichung nicht auf die oben genannte Form gebracht werden kann. Alle Kurven dieser Art werden im allgemeinen transcendente genannt.

Bleiben wir zunächst, um mit den einfachsten Fällen zu beginnen, bei solchen Gleichungen stehen, die in der entwickelten Form

$$y = f(x)$$

gegeben sind, so gehört z. B. aus dem Gebiete der niederen Arithmetik hierher die Gleichung

$$y = a^x,$$

worin die Basis a konstant ist und der Exponent x eine veränderliche Abscisse darstellt*). Auf x reduziert gibt sie

*) Auch Linien, deren Gleichung die Form

$$y = x^m$$

besitzt, wobei m konstant sein soll, sind zu den transcendenten zu rechnen, sobald sie nicht unter einen bestimmten endlichen Grad gebracht werden können. Es findet dies statt, wenn m eine irrationale Zahl ist, also z. B., wenn $m = \sqrt{2}$. Setzt man für $\sqrt{2}$ die Näherungswerte

$$x = {}^{a}\log y.$$

sodaß bei geometrischer Darstellung durch Parallelkoordinaten die Abscissen die den Ordinaten zugehörenden Logarithmen zur Basis a ausdrücken. — Gehen wir ferner in das Gebiet der Trigonometrie über, so erhalten wir einfache Beispiele transcendenter Kurven aus den Gleichungen

$$y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad y = \tan x \quad \text{u. s. w.},$$

wobei die x, um als Längen aufgetragen werden zu können, in Teilen des Radius gemessene Bogenlängen bezeichnen sollen. Die Reduktion auf x führt zu den cyklometrischen Funktionen:

$$x = \operatorname{Arc} \sin y, \qquad x = \operatorname{Arc} \cos y \quad \text{u. s. f.}$$

Alle genannten einfachen Funktionen können wieder beliebig sowohl unter sich, als auch mit algebraischen verbunden werden, um neue Gleichungen transcendenter Kurven zu liefern, wozu noch eine fortwährend wachsende Menge solcher Funktionen tritt, welche in der höheren Mathematik ihre Entstehung haben. Ein Versuch, die Verschiedenartigkeit der hieraus fließenden Gestalten auch nur angenähert vorzuführen, muß bei ihrer unendlichen Zahl ein vergeblicher sein; einer vollständigen Untersuchung, auch nur der einfachsten Formen, sind die Kräfte der Elementarmathematik nicht gewachsen. Wir beschränken uns deshalb darauf, im folgenden die Gleichungen einiger wenigen häufiger genannten transcendenten Kurven aufzustellen, wobei wir der Einfachheit der Betrachtung wegen, soweit Parallelkoordinaten zur Anwendung kommen, nur von rechtwinkligen Systemen Gebrauch machen werden.

Eine Kurve, deren Gleichung auf die allgemeine Form

$$(1) \qquad y = A b^{x}$$

zurückgeführt werden kann, führt den Namen logarithmische Linie, weil ihre Gleichung sich immer so umformen läßt, daß bei geeigneter Wahl des Koordinatenanfanges und der Längeneinheit die Abscissen die Logarithmen der zugehörigen Ordinaten für

$\pm$ 1,4 . ., $\pm$ 1,41 . . ., so würde in diesem Falle die Linie, welcher jene Gleichung zukommt, angenähert durch zwei Kurven vierzehnten Grades, oder durch zwei Kurven vom hunderteinundvierzigsten Grade u. s. f. dargestellt werden können. In der Tat gehört sie aber einem unendlich hohen Grade an. Leibniz nennt Linien dieser besonderen Art interscendente Kurven.

irgend eine gegebene Basis darstellen. Bezeichnen wir nämlich mit e diese Basis und mit log die zugehörigen Logarithmen, so läßt sich vorerst mit Einführung einer neuen beständigen Größe m, für welche die Beziehung

$$e^{\frac{1}{m}} = b^{\frac{1}{c}}$$

oder, indem wir zu den Logarithmen übergehen,

$$2) \qquad m = \frac{c}{\log b}$$

Geltung hat, die Gleichung 1) in

$$3) \qquad y = A e^{\frac{x}{m}}$$

umformen. Wird dann der Koordinatenanfang auf der x-Achse um eine vorläufig noch unbestimmte Strecke a verschoben, so geht x in $x + a$ über; man erhält also:

$$y = A e^{\frac{x+a}{m}} = A e^{\frac{a}{m}} e^{\frac{x}{m}},$$

und hieraus entsteht, wenn man über a so verfügt, daß

$$A e^{\frac{a}{m}} = m$$

wird, wonach

$$4) \qquad a = m \log \frac{m}{A}$$

sein muß, die Gleichung:

$$5) \qquad y = m e^{\frac{x}{m}}.$$

Wählt man die durch die Gleichung 2) bestimmte Konstante m als Längeneinheit, so bleibt:

$$6) \qquad y = e^x, \qquad x = \log y,$$

wodurch die oben ausgesprochene Behauptung gerechtfertigt wird. Dabei ist für die allgemeine Geltung der angewendeten Folgerungen nur nötig, daß die Basen b und e positive Zahlen darstellen und nicht gleich Eins sind; negative Werte der beständigen Größen A, c oder m können durch geeignete Vertauschung der positiven und negativen Achsenseiten in positive umgewandelt werden.

Ist die Gleichung der logarithmischen Linie auf die Form 6) gebracht, so kann man noch, ohne daß der Allgemeinheit der Betrachtung Eintrag geschieht, $e > 1$ annehmen. Im entgegengesetzten Falle hat man nämlich nur die durch die y-Achse geschiedenen

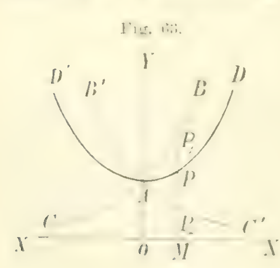
Seiten der y-Achse zu verwechseln, um x in $-x$ überzuführen; dann verwandelt sich die Gleichung der Kurve in

$$y = \left(\frac{1}{c}\right)^x,$$

worin $\frac{1}{c}$ gewiß größer als Eins ist. Gewöhnlich versteht man unter e die bekannte Irrationalzahl 2,7182818 ...; die Abscissen der durch die Gleichung 6) dargestellten Kurve stellen in diesem Falle die sogenannten natürlichen Logarithmen der zugehörigen Ordinaten dar.

Was die Gestalt der logarithmischen Linie betrifft, so ergibt sich aus Nr. 5) und 6) zu jedem x, welches eine ganze Zahl oder einen Bruch mit ungeradem Nenner darstellt, ein positiver reeller Wert von y, der, $c > 1$ vorausgesetzt, gleichzeitig mit x wächst; hingegen erhält man zwei reelle entgegengesetzte Werte, deren absolute Größe ebenfalls mit x zunimmt, sobald x einen Bruch mit geradem Nenner bildet. Auf der Seite der positiven Ordinaten entsteht demnach eine stetig zusammenhängende Linie, während auf der Seite der negativen y nur eine unbegrenzte Anzahl isolierter Punkte befindlich ist. Von letzteren ist hier, wo es sich um die Untersuchung kontinuierlicher Linien handelt, gänzlich abzusehen. Für den Verlauf der dann übrig bleibenden, auf der Seite der positiven y gelegenen Kurve folgt aus 5), daß $y = m$, wenn $x = 0$; für $x = +\infty$ wird $y = \infty$, für $x = -\infty$ ist $y = 0$. Die Kurve erstreckt sich also auf der Seite der positiven x und y ins Unendliche, während sie sich der negativen Abscissenachse fortwährend nähert, ohne dieselbe je zu erreichen. Die x-Achse ist demnach unter Voraussetzung der Gleichungsformen 5) oder 6) eine Asymptote der logarithmischen Linie.

Fig. 63.



Zwei logarithmische Linien BAC und $B'AC'$ (Fig. 63), deren Gleichungen die Form

$$y = me^{\frac{x}{m}}, \qquad y = me^{-\frac{x}{m}}$$

besitzen, wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen darstellen soll, sind unter sich kongruent, da eine in die andere übergeht, wenn x mit $-x$ vertauscht wird. Aus beiden kann eine in der Mechanik mehrfach vorkommende transcendente Kurve DAD' gebildet werden, wenn man Parallelen

wie $P_1 M$ zur y-Achse zieht und darin den geometrischen Ort für die Mitte P der von den Kurven BAC und $B'AC'$ begrenzten Strecke $P_1 P_2$ aufsucht. Setzen wir $OM = x$, $MP_1 = y_1$, $MP_2 = y_2$, so gelten die Gleichungen

$$y_1 = m e^{\frac{x}{m}}, \quad y_2 = m e^{-\frac{x}{m}}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Man erhält hieraus für den gesuchten Ort die Gleichung:

7) $$y = \frac{m}{2}\left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right),$$

oder, wenn wieder wie bei Nr. 6) m zur Längeneinheit gewählt wird,

8) $$y = \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Die durch die Gleichungen 7) und 8) bezeichnete Kurve führt den Namen der gemeinen Kettenlinie. Sie wird von einem in zwei Punkten frei aufgehangenen, vollkommen biegsamen und undehnbaren Faden gebildet, wenn derselbe in allen Punkten gleiche Belastungen trägt, wenn er also z. B. unter der Voraussetzung, daß gleiche Fadenlängen gleich schwer sind, durch sein eigenes Gewicht gespannt wird.

§ 42. Die Spirallinien.

Wird die auf rechtwinklige Parallelkoordinaten bezogene Gleichung einer algebraischen Kurve mittels der bekannten Formeln

1) $$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

in Polarkoordinaten umgesetzt, so geht das allgemeine Glied der algebraischen Gleichung, für welches wir früher die Form

2) $$C x^p y^q$$

festgestellt hatten, in der Gleichung für Polarkoordinaten in

3) $$C r^{p+q} \cos^p\varphi \sin^q\varphi$$

über. Mit Rücksicht auf den Umstand, daß der Wert dieses Gliedes vollkommen ungeändert bleibt, wenn man den Winkel φ um eine volle Umdrehung wachsen oder abnehmen läßt, konnten wir alle einer solchen Gleichung entsprechenden Punkte erlangen, wenn wir uns auf solche Werte von φ einschränkten, die zwischen den Grenzen 0 und 360⁰ enthalten sind. Nicht minder war es gestattet, negative Leitstrahlen auszuschließen, weil es für die Größe

des mit 3) bezeichneten Ausdruckes völlig gleichgültig bleibt, ob man r mit $-r$ vertauscht, oder dem Polarwinkel einen um eine halbe Umdrehung größeren oder kleineren Wert verleiht. Diese Beschränkungen sind aber nicht mehr zulässig, wenn alle einer Gleichung von der Form

$$r = f(\varphi) \quad \text{oder} \quad F(r, \varphi) = 0$$

entsprechenden Punkte dargestellt werden sollen und die Funktionen f und F in Beziehung auf die Längen der Leitstrahlen nicht die im vorigen angegebene Periodizität besitzen, wobei jedoch die Kurven nicht mehr algebraisch sein können, sondern dem Gebiete der transcendenten Linien angehören müssen. Namentlich gehören hierher alle solche Kurven, aus deren Gleichung in Polarkoordinaten für stetig wachsende Polwinkel fortwährend zu- oder abnehmende Leitstrahlen hervorgehen, sodaß in jeder durch den Koordinatenanfang gezogenen Geraden unendlich viele Peripheriepunkte gelegen sind. Linien dieser Art ziehen sich in unendlich vielen Windungen um den festen Pol herum und führen im allgemeinen den Namen **Spiralen oder Spirallinien**.

Zur Untersuchung der Spiralen eignen sich am besten ihre auf Polarkoordinaten bezogenen Gleichungen, wobei wir aber nach dem vorhergehenden die Werte der Leitstrahlen sowohl als der Polwinkel nicht mehr beschränken dürfen, sondern zwischen den weitesten reellen Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ gelegen annehmen müssen. — Um hier, wo wir nicht mehr mit goniometrischen Funktionen der Polwinkel zu tun haben, die Werte von φ ebenso wie die r als abstrakte Zahlen auffassen zu können, die bei Annahme einer bestimmten linearen Einheit als Längen darstellbar sind, werden wir jene Winkel durch die Bogenlängen ausdrücken, welche ihnen in einem mit der Längeneinheit als Halbmesser um den Pol konstruierten Kreise zugehören. Wir bedienen uns dabei der Abkürzung

4) $$\theta = \operatorname{Arc} \varphi,$$

sodaß für zwei einander entsprechende Werte von θ und φ die Proportion

5) $$\theta : \pi = \varphi^0 : 180^0$$

Geltung findet*). Die Gleichung einer jeden Spirallinie wird dann in der Form

*) Um eine Analogie mit dem Parallelkoordinatensystem zu erhalten, können wir den mit einem der linearen Einheit gleichen Halbmesser um

$$r = f(\theta)$$

dargestellt. — Als Beispiele für die Spiralen wählen wir die folgenden.

1. Die Spirale des Archimedes oder lineare Spirale, die einfachste von allen, besitzt die Gleichung

$$(6) \qquad r = a\theta,$$

wobei a ein beliebiger konstanter Wert sein soll. Bezeichnen wir zwei ihrer Punkte mit $r\theta$ und $r_1\theta_1$, so folgt aus

$$r = a\theta, \qquad r_1 = a\theta_1$$

die Proportion

$$r : r_1 = \theta : \theta_1 .$$

Man kann sich hiernach, da die Leitstrahlen in demselben Verhältnisse wie die Polarwinkel zunehmen, die genannte Spirale durch die stetige Bewegung eines Punktes erzeugt denken, der auf einer um den Pol gedrehten geraden Linie von diesem Drehmittelpunkte aus so fortrückt, daß die von ihm zurückgelegten Wege den von der Geraden beschriebenen Winkeln proportional sind. Eine derartige Spirale würde also z. B. entstehen, wenn bei gleichförmiger Drehung des Leitstrahls um den Pol ein beschreibender Punkt auf ihm gleichförmig fortrückt.

Setzt man $\theta_1 = 2\pi + \theta$, so fallen r_1 und r in dieselbe Gerade, gehören aber zu zwei um den Umfang einer Windung voneinander entfernten Punkten. Für den Abstand beider Punkte folgt dann:

$$r_1 - r = a(\theta_1 - \theta) = 2\pi a,$$

d. h. in jeder durch den Pol gelegten Geraden besitzen die einzelnen Windungen die unveränderliche Entfernung $2\pi a$.

Fig. 64.

A — X

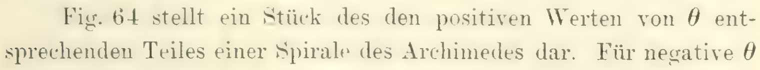


Fig. 64 stellt ein Stück des den positiven Werten von θ entsprechenden Teiles einer Spirale des Archimedes dar. Für negative θ

den Pol als Mittelpunkt gezogenen Kreis als eine krummlinige Abscissenachse ansehen, auf welcher der Durchschnitt mit der Polarachse den Nullpunkt bildet, von dem aus die positiven und negativen θ nach beiden Seiten gezählt werden. Die auf diesem Kreise senkrecht stehenden Leitstrahlen bilden die den Abscissen θ zugehörigen Ordinaten; nur findet dabei der Unterschied statt, daß diese Ordinaten nicht von ihrem Einfallspunkte in die Abscissenlinie, sondern vom Kreismittelpunkte aus gemessen werden.

wechselt auch r sein Vorzeichen, ohne seine absolute Größe zu ändern; der hierzu gehörende Teil der Kurve ist daher dem in der Figur dargestellten völlig gleich, besitzt aber eine entgegengesetzte Lage. Man erhält ihn, wenn man sich die Bildebene um eine in der Ebene der Spirale durch den Pol A gelegte Senkrechte zur Polarachse AX so herumgedreht denkt, daß AX die Rückwärtsverlängerung seiner vorherigen Lage bildet.

II. Wird als Seitenstück der auf rechtwinklige Parallelkoordinaten bezogenen Parabelgleichung $y^2 = 2px$ für Polarkoordinaten die Gleichung

7) $$r^2 = 2p\theta$$

gebildet, so heißt die dadurch ausgedrückte Kurve eine parabolische Spirale. Nach der Form ihrer Gleichung sind negative Werte von θ völlig ausgeschlossen, weil sie auf imaginäre Leitstrahlen hinführen. Zu jedem positiven θ gehören zwei an absoluter Größe gleiche, der Richtung nach aber entgegengesetzte Werte von r, sodaß die Kurve aus zwei im Pole zusammentreffenden Teilen besteht, für welche der Pol selbst den Mittelpunkt bildet. Einer dieser Teile tritt an die Stelle des andern, wenn man die Spirale eine halbe Umdrehung um eine rechtwinklig gegen die Ebene der Kurve durch den Pol gelegte Achse machen läßt. Beschränken wir uns, um einen dieser beiden Teile vollständig kennen zu lernen, auf positive r, so ist für $\theta = 0$ auch $r = 0$, und es wächst von hier an r gleichzeitig mit θ, sodaß eine im ganzen mit Fig. 64 einige Ähnlichkeit besitzende Gestalt entsteht. Nur findet der Unterschied statt, daß, wenn man in der Richtung eines Leitstrahles vom Pole aus fortgeht, die einzelnen Windungen immer näher aneinander treten, weil nach der Form von Nr. 7) die r in einem schwächeren Verhältnisse als die zugehörigen Werte von θ anwachsen. Bestätigt wird diese Bemerkung, wenn wir in ähnlicher Weise wie bei der Archimedischen Spirale den Abstand zweier in einer durch den Pol gelegten Geraden befindlichen Peripheriepunkte bestimmen, welche zu zwei aufeinander folgenden Windungen gehören. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen folgt aus den Gleichungen

$$r^2 = 2p\theta,$$

$$r_1^2 = 2p(2\pi + \theta),$$

wenn man die Differenz $r_1^2 - r^2$ in $(r_1 - r)(r_1 + r)$ zerlegt, das Resultat:

$$r_1 - r = \frac{4\pi p}{r_1 + r} = \frac{2\pi p}{r_2},$$

worin r_2 das leicht konstruierbare arithmetische Mittel zwischen r_1 und r darstellt. Da in der letzten Gleichung der Zähler konstant ist, so muß der besprochene Abstand sich vermindern, sobald mit wachsendem θ der Nenner zunimmt.

III. Die durch die Gleichung

$$8) \qquad r\theta = a$$

dargestellte Spirale heißt mit Bezug auf die Ähnlichkeit, welche zwischen Nr. 8) und der auf die Asymptoten bezogenen Gleichung einer Hyperbel für Parallelkoordinaten stattfindet, hyperbolische Spirale. Sie besteht aus zwei unter sich kongruenten Teilen, von denen der eine den positiven und der andere den negativen Werten von θ entspricht und die gegeneinander eine gleiche Lage haben, wie in der Spirale des Archimedes, weil auch hier r und θ gleichzeitig ihre Vorzeichen wechseln. Halten wir zur Untersuchung der Gestalt eines dieser beiden Teile positive Werte von θ fest, so folgt aus der auf r reduzierten Gleichung

$$9) \qquad r = \frac{a}{\theta},$$

daß r abnimmt, wenn θ wächst, dabei aber nie vollständig in Null übergehen kann. Die einzelnen Windungen nähern sich also fort und fort dem Pole, ohne ihn je vollständig zu erreichen; derselbe bildet einen sogenannten asymptotischen Punkt. In ihrer Annäherung an diesen Punkt treten die Windungen immer enger aneinander, wie sich sofort zeigt, wenn wir für zwei um den Umfang einer Windung voneinander entfernte Punkte aus den Gleichungen

Fig. 65.

$$r = \frac{a}{\theta}; \quad r_1 = \frac{a}{2\pi + \theta}$$

die Differenz

$$r - r_1 = \frac{2\pi a}{\theta(2\pi + \theta)}$$

bilden. Der Zähler dieses Ausdrucks ist konstant, während der Nenner wächst, wenn θ zunimmt oder die Größe von r sich vermindert.

Nach der andern Seite hin rückt für abnehmende θ oder zunehmende r die hyperbolische Spirale immer näher an eine Gerade LL' (Fig. 65), welche in einem Abstande $AB = a$ parallel zur Polarachse AX läuft. Setzen wir nämlich $MP = y$, so ist

$$y = r \sin \theta,$$

folglich bei Einsetzung des Wertes von r aus Nr. 9)

$$y = a \frac{\sin \theta}{\theta}.$$

Hieraus ergibt sich sogleich die Richtigkeit der ausgesprochenen Behauptung, wenn man beachtet, daß der Quotient $\frac{\sin \theta}{\theta}$ kleiner als die Einheit ist, solange sich θ von Null unterscheidet, für $\theta = 0$ aber in Eins übergeht*). Da in dem letzteren Falle der Leitstrahl unendlich werden muß, so stellt die Gerade LL' eine Asymptote dar.

Bemerkenswert ist noch die folgende geometrische Deutung der Gleichung 8). Beschreibt man aus dem Mittelpunkte A mit dem Halbmesser AP den von der Spirale und der polaren Achse eingeschlossenen Kreisbogen PQ, so ist die Länge dieses Bogens gleich $r\theta$, wenn r und θ die Polarkoordinaten des Punktes P bezeichnen. Mit Rücksicht auf die Gleichung der hyperbolischen Spirale folgt hieraus, daß ein solcher Kreisbogen wie PQ die unveränderliche Lage $a = AB$ besitzt, an welcher Stelle der Kurve auch der Punkt P angenommen sein mag.

IV. Wird in der Gleichung der logarithmischen Linie (vergl. § 41 Nr. 1 bis Nr. 6) y mit r mit x und θ vertauscht, so entsteht die Gleichung der logarithmischen Spirale. Nach Analogie von § 41 Nr. 3) kann sie immer auf die Form

*) Aus der für jeden zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ enthaltenen Bogen θ geltenden Ungleichung

$$\tan \theta > \theta > \sin \theta$$

folgt, wenn man mit den darin enthaltenen Größen in $\sin \theta$ dividiert,

$$\cos \theta < \frac{\sin \theta}{\theta} < 1.$$

Beide Grenzen, zwischen denen der Quotient $\frac{\sin \theta}{\theta}$ enthalten ist, rücken für abnehmende Werte von θ einander immer näher; schließlich fallen beide zusammen und es geht auch der von ihnen eingeschlossene Quotient in die Einheit über, wenn $\theta = 0$ geworden ist.

10) $$r = A e^{\frac{\theta}{m}}$$

gebracht werden, woraus die Gleichung

11) $$r = m e^{\frac{\theta}{m}}$$

entsteht, wenn man die polare Achse in der Ebene der Kurve mit Beibehaltung des Poles um einen in Teilen des Radius gemessenen Bogen α dreht, für welchen die Relation

$$\alpha = m \log \frac{m}{A}$$

Geltung hat. Bei dieser Drehung geht nämlich θ in $\theta + \alpha$ über, und es sind ganz analoge Reduktionen wie bei der logarithmischen Linie anwendbar. Wir können hierbei unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstehen und m als positive Zahl auffassen. Nach 11) ergibt sich dann für jedes θ ein positiver reeller Wert von r, der gleichzeitig mit θ zunimmt. Für $\theta = 0$ ist $r = m$, für $\theta = +\infty$ wird auch $r = \infty$, für $\theta = -\infty$ ist $r = 0$. Die logarithmische Spirale erstreckt sich hiernach mit ihren Windungen auf der einen Seite ins Unendliche, während sie sich auf der andern dem Pole fortwährend nähert, ohne ihn je zu erreichen. Der Pol bildet in gleicher Weise wie in der vorher untersuchten Kurve einen asymptotischen Punkt. Dabei müssen offenbar die einzelnen Windungen immer näher aneinander rücken, je mehr sie sich diesem Punkte nähern. Wir finden diese Bemerkung bestätigt, wenn wir den allgemeinen Ausdruck für den geradlinigen Abstand zweier um den Umfang einer Windung voneinander entfernten Punkte aufsuchen. Werden die Leitstrahlen der zu den Bogenlängen θ und $2\pi + \theta$ der Polarwinkel gehörenden Punkte wieder mit r und r_1 bezeichnet, so hat man

$$r = m e^{\frac{\theta}{m}}, \quad r_1 = m e^{\frac{2\pi + \theta}{m}} = m e^{\frac{2\pi}{m}} e^{\frac{\theta}{m}},$$

folglich

$$r_1 - r = m e^{\frac{\theta}{m}} \left(e^{\frac{2\pi}{m}} - 1\right).$$

Hierin bedeutet der auf der rechten Seite außerhalb der Klammer befindliche Faktor den Leitstrahl r; der Inhalt der Klammer dagegen ist eine beständige Größe. Die Differenz $r_1 - r$ nimmt demnach in demselben Verhältnisse wie r ab oder zu.

Nach der Gleichung 11) sind auch noch negative Werte von r möglich, sobald $\frac{n}{m}$ einen Bruch mit geradem Nenner darstellt: man erhält hieraus zwar eine unbegrenzte Anzahl von Punkten, aber keine zusammenhängende Linie, weil diese Punkte nicht eine stetige Folge bilden.

§ 43. Die Rollkurven.

Dieselbe gegenseitige Abhängigkeit, in welcher zwei durch eine Gleichung aneinander gebundene veränderliche Größen stehen, ist auch dann noch vorhanden, wenn die Werte beider Variabeln durch zwei Gleichungen an eine dritte veränderliche Größe geknüpft sind. Hat man z. B. zwei Gleichungen von der Form

1) $$x = \varphi(\omega), \qquad y = \psi(\omega),$$

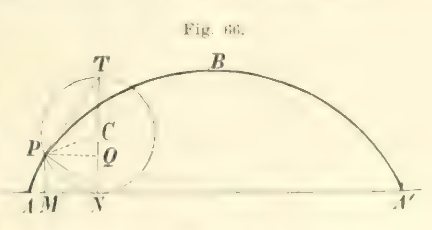
worin φ und ψ die allgemeinen Symbole beliebiger Funktionen einer Variabeln ω bezeichnen mögen, so erhält man daraus für jeden Wert von ω zwei zusammengehörige Werte von x und y, die, wenn man x und y als Parallelkoordinaten auffaßt, die Lage eines Punktes bestimmen. Gibt nun die stetige Änderung von ω Werte von x und y, die sich ebenfalls stetig ändern, also eine kontinuierliche Folge von Punkten darstellen, so wird durch das System der beiden Gleichungen 1) der zusammenhängende Lauf einer Linie bestimmt, ganz abgesehen davon, ob die Mittel der Mathematik ausreichen, die Hilfsvariable ω aus diesen Gleichungen zu entfernen. Eine nutzbare Anwendung finden solche Gleichungssysteme bei einer Klasse von Kurven, die wir im folgenden als letztes Beispiel transcendenter Linien vorführen wollen.

Wird an einer festen Linie eine andere so hinbewegt, daß sie mit ihr in fortwährender Berührung bleibt, sich dabei aber an der festen Linie abwickelt, sodaß bei je zweien ihrer aufeinander folgenden Lagen die zwischen den zusammengehörigen Berührungspunkten enthaltenen Bogenlängen in beiden Peripherien einander gleich sind, so beschreibt ein mit der bewegten Linie in fester Verbindung bleibender Punkt eine neue Linie, die wir im allgemeinen eine Rollkurve (Roulette) oder auch Cykloide nennen wollen. Die einfachsten hierher gehörigen Fälle entstehen, wenn ein Kreis, ohne zu gleiten, auf einer Geraden oder auf der Peripherie

eines anderen Kreises fortrollt, oder wenn eine Gerade sich, ohne verschoben zu werden, an der Peripherie eines Kreises abwickelt.

I. Die gemeine Cykloide oder Cykloide im engeren Sinne ist der Weg, den ein Peripheriepunkt eines Kreises beschreibt, wenn letzterer, ohne zu gleiten, auf einer geraden Linie rollt. In Fig. 66 sei AA' die feste Gerade und P der beschreibende Punkt, der in A mit dem Berührungspunkte der Geraden und des Kreises zusammengefallen sein mag. Wir nehmen AA' zur x-Achse und A zum Nullpunkte eines rechtwinkligen Koordinatensystems, setzen also $AM = x$, $MP = y$; der durch seine in Teilen des Halbmessers ausgedrückte Bogenlänge gemessene Winkel NCP (der sogenannte Wälzungswinkel) heiße ω, und $CP = CT = CN = a$ sei der Radius des rollenden Kreises. Dann erhält man, wenn PQ parallel zur x-Achse gezogen wird, aus

Fig. 66.



$$x = AN - MN, \qquad y = NC - QC$$

die zusammengehörigen Gleichungen:

$$2) \qquad x = a\omega - a \sin \omega, \qquad y = a - a \cos \omega.$$

Reduziert man die letzte dieser beiden Gleichungen auf $\cos \omega$, so ergibt sich:

$$\cos \omega = \frac{a - y}{a} \qquad \sin \omega = \sqrt{1 - \cos^2 \omega} = \frac{\sqrt{2ay - y^2}}{a},$$

$$\omega = \operatorname{Arc} \cos \left(\frac{a - y}{a}\right),$$

und hiermit kann durch Einsetzung dieser Werte in die erste Gleichung die Hilfsgröße ω entfernt werden. Bequemer ist es aber in den meisten Fällen, von dem Systeme der Gleichungen 2) Gebrauch zu machen.

Aus der für y aufgestellten Gleichung folgt, daß die Ordinate immer zwischen den Grenzen 0 und $2a$ enthalten sein muß, und zwar ist ist $y = 0$, wenn $\cos \omega = 1$, oder wenn ω einen der Werte

$$\cdots - 4\pi, \quad - 2\pi, \quad 0, \quad + 2\pi \quad + 4\pi, \cdots$$

besitzt, man erhält dann für x die Längen

$$\cdots - 4\pi a, \quad - 2\pi a, \quad 0, \quad + 2\pi a, \quad + 4\pi a, \cdots$$

Ferner erreicht y seinen größten Wert $2a$, so oft $\cos\omega = -1$, oder so oft ω einen der Werte

$$\cdots - 3\pi, \quad -\pi, \quad +\pi, \quad +3\pi, \cdots$$

erlangt; für x finden sich dann die zugehörigen Größen

$$\cdots - 3\pi a, \quad -\pi a, \quad +\pi a, \quad +3\pi a, \cdots.$$

Werden hierzu noch Zwischenwerte gefügt, so kommt man zu der Erkenntnis, daß die Kurve aus unendlich vielen kongruenten Zügen von der Form ABA' (Fig. 66) besteht.

Als ein weiteres Beispiel dafür, in welcher Weise das System der Gleichungen 2) zur Untersuchung der Kurve zu benutzen ist, wählen wir die Ermittelung der Tangentenlage. Wir bestimmen zu diesem Zwecke zunächst die Richtung einer zwei Kurvenpunkte P_1 und P_2 enthaltenden Sekante; ändert man nun die Lage dieser Punkte in der Weise, daß sie sich nähern und schließlich ihr Abstand verschwindend klein wird, so wird die Sekante zur Tangente.

Sind $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ zwei Cykloidenpunkte, denen die Wälzungswinkel $\omega + \delta$ und $\omega - \delta$ zugehören, so ist

$$3)\quad \begin{cases} x_1 = a(\omega + \delta) - a\sin(\omega + \delta), & y_1 = a - a\cos(\omega + \delta), \\ x_2 = a(\omega - \delta) - a\sin(\omega - \delta), & y_2 = a - a\cos(\omega - \delta). \end{cases}$$

Unter Benutzung der Formeln

$$4)\quad \begin{cases} \sin(\omega + \delta) - \sin(\omega - \delta) = 2\cos\omega\sin\delta, \\ \cos(\omega - \delta) - \cos(\omega + \delta) = 2\sin\omega\sin\delta \end{cases}$$

folgt hieraus für den in der Drehrichtung der Polarwinkel gemessenen Winkel σ, den eine die Punkte $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ enthaltende Sekante mit der Abscissenachse einschließt,

$$5)\quad \tan\sigma = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{\sin\omega\sin\delta}{\delta - \cos\omega\sin\delta}.$$

Wird im Zähler und Nenner durch δ dividiert, so entsteht, wenn wir zur Abkürzung

$$6)\quad \frac{\sin\delta}{\delta} = \varepsilon$$

setzen, die Gleichung:

$$7)\quad \tan\sigma = \frac{\varepsilon\sin\omega}{1 - \varepsilon\cos\omega}.$$

Für $\delta = 0$ wird $\varepsilon = 1$ (vergl. die Anmerkung auf S. 258); dabei fallen beide Peripheriepunkte zusammen und die Sekante wird zur

Tangente. Bezeichnet also τ den im gleichen Sinne wie σ gemessenen Winkel, den diese Tangente mit der x-Achse bildet, so folgt aus 7):

$$8) \qquad \tan\tau = \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega} = \cot\frac{\omega}{2}.$$

Man kann hieraus leicht herleiten, daß die Tangente im Punkte P (Fig. 66) durch den von der Geraden AA' am weitesten abstehenden Punkt T des Erzeugungskreises gehen muß. PT ist Tangente und PN Normale.

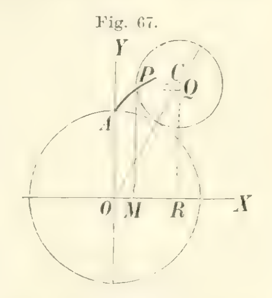
Beobachtet man den Weg, den, während der Erzeugungskreis auf der Basis AA' rollt, ein auf dem Radius CP oder seiner Verlängerung, im Abstande c vom Kreismittelpunkte gelegener Punkt beschreibt, so erhält man in gleicher Weise, wie die Gleichungen 2) entstanden, für den Ort dieses Punktes die zusammengehörigen Formeln:

$$9) \qquad x = a\omega - c\sin\omega, \qquad y = a - c\cos\omega.$$

Die hierdurch ausgedrückte Kurve führt den Namen **geschweifte oder gedehnte Cykloide**, wenn $c < a$, **verkürzte oder verschlungene Cykloide**, wenn $c > a$. Die Untersuchung ihrer Gestalt mit Benutzung der Gleichungen 9) kann in ähnlicher Weise wie bei der gemeinen Cykloide geführt werden.

II. Rollt ein Kreis auf der Außenseite der Peripherie eines festen Kreises, so beschreibt ein Peripheriepunkt der rollenden Linie eine sogenannte **Epicykloide**. Zur Ermittelung der Gleichungen dieser Kurve legen wir in Fig. 67 durch den Mittelpunkt des festen Kreises ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen y-Achse den Anfangspunkt A der Bewegung enthält, in welchem der beschreibende Punkt P mit dem Berührungspunkte beider Kreise zusammenfiel. Setzen wir wieder den Wälzungswinkel $OCP = \omega$,

Fig. 67.



so ist wegen der Gleichheit der aneinander abgewickelten Bogenlängen $\angle COA = \frac{a\omega}{b}$ und $\angle QCP = \frac{(b+a)\omega}{b}$, wenn a den Radius des rollenden, b den Radius des festen Kreises bezeichnet. Sämtliche Winkel sollen hierbei wie vorher in Teilen des Halbmessers ausgedrückt werden. Aus der Figur folgt dann zunächst, wenn $PQ \parallel OX$ und $RC \parallel OY$ gezogen ist,

$$OM = OR - PQ, \qquad MP = RC - QC,$$

und hieraus ergibt sich für die Koordinaten x und y des beschreibenden Punktes P:

$$10) \quad \begin{cases} x = (b + a) \sin \dfrac{a\omega}{b} - a \sin \dfrac{(b + a)\omega}{b}, \\ y = (b + a) \cos \dfrac{a\omega}{b} - a \cos \dfrac{(b + a)\omega}{b}. \end{cases}$$

Werden beide Gleichungen quadriert und addiert, so erhält man für das Quadrat der Entfernung des Punktes P vom Mittelpunkte O des festen Kreises:

$$11) \qquad x^2 + y^2 = (b + a)^2 + a^2 - 2a(b + a) \cos \omega,$$

woraus sofort folgt, daß diese Entfernung immer zwischen den Grenzen b und $b + 2a$ enthalten sein muß. An der ersten dieser beiden Grenzen ist $\cos \omega = 1$, ω besitzt also einen der Werte

$$\cdots - 4\pi, \quad - 2\pi, \quad 0, \quad + 2\pi, \quad + 4\pi, \cdots$$

an der zweiten Grenze ist $\cos \omega = - 1$, woraus man für ω die Werte

$$\cdots - 3\pi, \quad - \pi, \quad + \pi, \quad + 3\pi, \cdots$$

erhält. Die zugehörigen x und y finden sich aus den Gleichungen 10).

Sobald die beiden Radien a und b in einem kommensurablen Verhältnisse stehen, sind die Epicykloiden nicht mehr transcendente Linien, sondern gehören in das Gebiet der algebraischen Kurven. In diesem Falle sind nämlich offenbar auch die Winkel $\frac{a\omega}{\omega}$ und $\frac{(b + a)\omega}{b}$ kommensurabel. Bezeichnen wir nun ihr gemeinschaftliches Maß mit ω_1, so läßt sich

$$\frac{a\omega}{b} = m\omega_1, \qquad \frac{(b + a)\omega}{b} = n\omega_1$$

setzen, wobei m und n zwei ganze Zahlen bezeichnen. Dann erlangen die Gleichungen 10) die Form:

$$x = (b + a) \sin m\omega_1 - a \sin n\omega_1,$$
$$y = (b + a) \cos m\omega_1 - a \cos n\omega_1,$$

worin man nur die goniometrischen Funktionen der Winkel $m\omega_1$ und $n\omega_1$ in bekannter Weise durch $\sin \omega_1$ und $\cos \omega_1$ auszudrücken hat, um mittels der Gleichung $\sin^2 \omega_1 + \cos^2 \omega_1 = 1$ den Winkel ω_1 entfernen zu können. Es bleibt dann eine algebraische Gleichung

zwischen x und y. — Als einfachstes hierher gehöriges Beispiel wählen wir den Fall, wenn beide Radien einander gleich sind. Die angegebene Rechnungsform läßt hierbei noch einige Vereinfachungen zu. Setzen wir nämlich in Nr. 10) $b = a$ und verlegen zugleich den Koordinatenanfang nach A (Fig. 67), sodaß y in $y + a$ übergeht, so erhalten wir für den vorliegenden Fall:

$$x = 2a \sin\omega - a \sin 2\omega,$$

$$y = 2a \cos\omega - a(1 + \cos 2\omega).$$

Mittels der Formeln

$$\sin 2\omega = 2 \sin\omega \cos\omega, \qquad 1 + \cos 2\omega = 2 \cos^2\omega$$

folgt hieraus:

$$x = 2a \sin\omega(1 - \cos\omega),$$

$$y = 2a \cos\omega(1 - \cos\omega).$$

Beide letzte Gleichungen geben durch Division verbunden

$$\tan\omega = \frac{x}{y},$$

woraus unter Berücksichtigung, daß nach der zweiten der vorhergehenden Gleichungen $\cos\omega$ und y immer gleiches Vorzeichen haben müssen, die Formel

$$\cos\omega = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

hervorgeht. Wird dieser Wert in den letzten für y gefundenen Ausdruck eingesetzt, so ergibt sich nach einfacher Umformung:

$$12) \qquad (x^2 + y^2 + 2ay)^2 = 4a^2(x^2 + y^2).$$

Die durch diese Gleichung ausgedrückte Linie vierten Grades besitzt, wie sich unter anderem durch den Übergang zu Polarkoordinaten leicht ableiten läßt, eine herzförmige Gestalt und führt hiervon den Namen Cardioide.

III. Läßt man den beweglichen Kreis auf der innern Seite der Peripherie eines festen Kreises rollen, so wird die von einem seiner Peripheriepunkte beschriebene Kurve Hypocykloide*) genannt. Ihre Gleichungen werden unter Beibehaltung der vorher

*) Besitzt der rollende Kreis einen größeren Radius als der ruhende, sodaß sich seine konkave Seite auf der konvexen des festen Kreises abwickelt, so erhält die Kurve von einigen den Namen Pericykloide. Auf die Ableitung der Gleichung hat dieser Unterschied keinen Einfluß.

angewendeten Bezeichnungen und der früheren Lage des Koordinatensystems ohne weiteres aus den für die Epicykloide geltenden Formeln hergeleitet, wenn man den Halbmesser a und dem Wälzungswinkel ω, welche beide in eine entgegengesetzte Lage übergehen, die entgegengesetzten Vorzeichen erteilt. Man wird diese Bemerkung bestätigt finden, wenn man die Fig. 67 in der dem jetzigen Falle entsprechenden Weise abändert. Nach Analogie von Nr. 10) ergeben sich dann für den Hypocykloidenpunkt xy mit dem Wälzungswinkel ω die Gleichungen:

$$13)\qquad \begin{cases} x = (b-a)\sin\dfrac{a\omega}{b} - a\sin\dfrac{(b-a)\omega}{b}, \\[2ex] y = (b-a)\cos\dfrac{a\omega}{b} + a\cos\dfrac{(b-a)\omega}{b}, \end{cases}$$

woran ähnliche Betrachtungen wie bei der Epicykloide geknüpft werden können. So gelangt man u. a. in gleicher Weise wie dort zu dem Resultate, daß, wenn die Halbmesser der beiden Kreise kommensurabel sind, die Hypocykloide in das Gebiet der algebraischen Kurven übertritt. Untersuchen wir z. B. den Fall, wo der Durchmesser des rollenden Kreises gleich dem Radius der festen Basis oder $b = 2a$ ist, so entsteht aus Nr. 13):

$$x = 0, \qquad y = 2a\cos\frac{\omega}{2}\cdot$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, daß dann die Hypocykloide in die geradlinige Ordinatenachse übergeht, die zweite, daß der beschreibende Punkt immer innerhalb derjenigen Strecke dieser Geraden bleiben muß, in welcher sie einen Durchmesser des festen Kreises bildet.

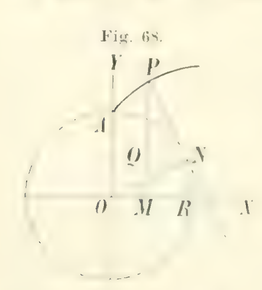


Fig. 68.

IV. Als letztes Beispiel einer Linie, welche nach der früher aufgestellten Begriffsbestimmung im weiteren Sinne ebenfalls zur Klasse der Rollkurven gezählt werden kann, wählen wir die Kreisevolvente (Fig. 68). Sie wird von einem Punkte P einer Geraden PN beschrieben, die sich ohne Verschiebung an der Peripherie eines festen Kreises so fortbewegt, daß sie immer mit ihm in Berührung bleibt. Es bildet also diese Kurve gewissermaßen den geraden

Gegensatz zur gemeinen Cykloide, indem bei ihr der Kreis fest und die Gerade beweglich ist, während dort der umgekehrte Fall stattfand.

Um ihre Gleichungen für Parallelkoordinaten zu ermitteln, benutzen wir ein rechtwinkliges System, dessen Anfang mit dem Mittelpunkte O des gegebenen Kreises zusammenfällt. Die y-Achse wird durch den in der Kreisperipherie befindlichen Kurvenpunkt A gelegt. Stellen $OM = x$ und $MP = y$ die Koordinaten des beschreibenden Punktes P dar, für welchen die bewegte Gerade PN den Kreis in N berührt, so ist, wenn man QN und RN parallel zu den Koordinatenachsen zieht,

$$x = OR - QN, \quad y = RN + QP.$$

Wird nun der Radius $OA = ON = a$ gesetzt und der in Teilen des Halbmessers ausgedrückte Winkel AON mit ω bezeichnet, so erhält man aus dem Entstehungsgesetze der Kurve:

$$PN = \operatorname{Arc} AN = a\omega,$$

folglich in Verbindung mit den vorhergehenden Gleichungen:

14) $$\begin{cases} x = a\sin\omega - a\omega\cos\omega, \\ y = a\cos\omega + a\omega\sin\omega. \end{cases}$$

Soll die Kreisevolvente durch Polarkoordinaten r und θ (in gleicher Weise wie bei den Spiralen, denen sie der Gestalt nach zugezählt werden kann) ausgedrückt werden, so können auch diese beiden veränderlichen Größen vom Winkel ω abhängig gemacht werden. Behalten wir O als Koordinatenanfang bei und nehmen OY zur polaren Achse, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \tan\theta = \frac{x}{y}\cdot$$

Mit Benutzung von Nr. 14) gibt die erste dieser beiden Formeln

15) $$r^2 = a^2 + a^2\omega^2,$$

woraus in Übereinstimmung mit der Entstehungsweise der Evolvente folgt, daß kein Punkt dieser Kurve innerhalb des festen Kreises gelegen sein kann. Von $r = a$ an wachsen die Werte von r gleichzeitig mit ω ins Unendliche. Die Gleichung $\tan\theta = \frac{x}{y}$ führt, wenn man aus 14) die Werte von x und y einsetzt und im Zähler und Nenner durch $a\cos\omega$ dividiert, zu dem Resultate:

$$\tan \theta = \frac{\tan \omega - \omega}{1 + \omega \tan \omega}.$$

Wird hierin auf ω reduziert, so entsteht die einfache Formel:

16) $$\omega = \tan (\omega - \theta),$$

aus welcher die den verschiedenen ω zugehörigen Werte von θ berechnet werden können. — Die Gleichungen 15) und 16) lassen sich übrigens auch auf sehr leichte Weise unmittelbar aus der Fig. 68 herleiten, wenn man darin den Leitstrahl OP zieht. Wir geben dies der Selbstübung des Lesers anheim.

Die Untersuchung über die Lage der Tangenten einer Kreisevolvente kann mit Hilfe der Gleichungen 14) auf demselben Wege wie bei der gemeinen Cykloide geführt werden. Sie liefert das Resultat, daß alle Tangenten des festen Kreises, welcher in dem im § 39 auf Seite 235 und 236 festgestellten Sinne die zugehörige Evolute darstellt, Normalen der Evolvente bilden. Es ist dies eine Eigenschaft, welche, wie die höhere Mathematik beweist, jeder Evolute in Beziehung zu ihrer Evolvente zukommt.